

Université Paris Cité

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre (ED 386)
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche (UMR 7586)

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Razvan Apredoaei

**On some properties and applications
of Toeplitz operators**

Dirigée par Xiaonan MA et George MARINESCU

Soutenue publiquement le 4 mai 2026

Composition du jury

M. Chin-Yu HSIAO	Professor	National Taiwan University	<i>Rapporteur et Président du jury</i>
M. Dan COMAN	Professor	Syracuse University	<i>Rapporteur</i>
M. Louis IOOS	Maître de conférences	Cergy Paris Université	<i>Examineur</i>
M ^{me} Michèle VERGNE	Directrice de recherches émérite	Université Paris Cité, CNRS	<i>Examinatrice</i>
M. Xiaonan MA	Professeur des universités	Université Paris Cité, puis Nankai University	<i>Directeur</i>
M. George MARINESCU	Professor	Universität zu Köln	<i>Directeur</i>
M. Tien-Cuong DINH	Professor	National University of Singapore	<i>Membre invité</i>

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Université Paris Cité.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Quelques propriétés et applications des opérateurs de Toeplitz

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions le noyau de Bergman et la quantification de Berezin-Toeplitz sur des variétés non compactes.

Le premier chapitre est introductif. Dans un premier temps, on y présente la quantification de Berezin–Toeplitz sur une variété symplectique complète à géométrie bornée. Dans un deuxième temps, on y donne un aperçu de résultats sur le comportement asymptotique du noyau de Bergman sur une surface de Riemann épointée.

Dans le deuxième chapitre, on établit un développement asymptotique près de la diagonale pour le noyau d’un opérateur de Toeplitz avec pour symbole la fonction indicatrice d’un domaine compact à bord lisse dans une variété symplectique complète à géométrie bornée. À l’aide de notre approche, on étend deux résultats au cadre non compact : le premier concerne le comportement asymptotique de la trace de polynômes en cet opérateur, le second consiste en une loi de Weyl pour cet opérateur de Toeplitz.

Dans le troisième chapitre, nous considérons une surface de Riemann épointée munie d’une métrique hermitienne qui coïncide avec la métrique de Poincaré près des points de ponction, ainsi qu’un fibré en droites holomorphe qui polarise la métrique. Nous montrons que le quotient des formes de Fubini–Study induites par les applications de Kodaira des puissances tensorielles élevées du fibré en droites et de la forme de Poincaré près de la singularité croît de manière polynomiale et uniforme dans un voisinage de la singularité lorsque la puissance tensorielle tend vers l’infini.

Mots-clés. Quantification de Berezin–Toeplitz, Noyau de Bergman, Géométrie bornée, Développement asymptotique, Surfaces de Riemann épointées.

On some properties and applications of Toeplitz operators

Abstract

In this thesis, we study the Bergman kernel and Berezin–Toeplitz quantization on non-compact manifolds.

The first chapter is introductory. First, we give a review Berezin–Toeplitz quantization on a complete symplectic manifold with bounded geometry. Subsequently, we provide an overview of results on the asymptotic behavior of the Bergman kernel on a punctured Riemann surface.

In the second chapter, we prove a diagonal expansion of the kernel of a Toeplitz operator whose symbol is the indicator function of a compact domain with smooth boundary in a complete symplectic manifold of bounded geometry. Using our approach, we extend two results to the non-compact setting: the first one concerns the asymptotics of the trace of polynomials in this operator, and the second one establishes a Weyl law for this Toeplitz operator.

In the third chapter, we consider a punctured Riemann surface endowed with a Hermitian metric that equals the Poincaré metric near the punctures, and a holomorphic line bundle that polarizes the metric. We show that the quotient of the induced Fubini–Study forms by Kodaira maps of high tensor powers of the line bundle and the Poincaré form near the singularity grows polynomially uniformly on a neighborhood of the singularity as the tensor power tends to infinity.

Keywords. Berezin–Toeplitz quantization, Bergman kernel, Bounded geometry, Asymptotic expansion, Punctured Riemann surfaces.

L'étrange — l'inquiétante route ! le seul grand chemin que j'aie jamais suivi, dont le serpentement, quand bien même tout s'effacerait autour de lui, de ses rencontres et de ses dangers — de ses taillis crépusculaires et de sa peur — creuserait encore sa trace dans ma mémoire comme un rai de diamant sur une vitre. On s'engagerait dans celui-là comme on s'embarque sur la mer. À travers trois cent lieues de pays confus, courant seul, sans nœuds, sans attaches, un fil mince, étiré, blanchi de soleil, pourri de feuilles mortes, il déroule dans mon souvenir la traînée phosphorescente d'un sentier où le pied tâtonne entre les herbes par une nuit de lune, comme si, entre les berges de nuit, je l'avais suivi d'un bout à l'autre à travers un interminable bois noir.

JULIEN GRACQ, *La Route*, tiré du recueil *La Presqu'île*.

Cité par JEAN-PHILIPPE JAWORSKI dans *Gagner la guerre*,
Chapitre X : *Des chemins incertains*.

Remerciements

C'est en premier lieu à mes directeurs de thèse, Xiaonan Ma et George Marinescu, que s'adressent ces remerciements. J'exprime ma profonde gratitude à Xiaonan Ma pour m'avoir encadré avec une patience et une rigueur mathématique constantes. Ses conseils avisés, son sens du détail et sa relecture attentive ont été essentiels à la réalisation de ce manuscrit. Malgré les imprévus, il a su tenir la barre et m'accompagner jusqu'à l'aboutissement de ce travail. Je remercie chaleureusement George Marinescu. C'est lors d'un stage de recherche à Cologne qu'il m'a initié aux opérateurs de Toeplitz, et il a depuis été un soutien précieux et plein d'encouragements lors de chacune de nos rencontres.

Je souhaite remercier Dan Coman et Chin-Yu Hsiao d'avoir accepté la charge de rapporteurs de cette thèse, de leurs retours détaillés et des perspectives de recherche qu'il m'ont suggérées. Toute ma reconnaissance va également à Michèle Vergne, Tien-Cuong Dinh et Louis Ioos pour l'honneur qu'ils me font de constituer mon jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Vincent Lafforgue et Stéphane Vassout pour leur rôle de tuteurs, leur bienveillance et leur écoute lors de nos rendez-vous réguliers.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans des échanges mathématiques stimulants. Je remercie Shu Shen de s'être investi avec soin dans le groupe de travail autour des travaux de Bismut, Gillet et Soulé. Je remercie vivement Siarhei Finski pour ses conseils et les explications détaillées de ses travaux, ainsi que Louis Ioos pour les nombreuses discussions (et le JMP !) autour des gaz de Coulomb, en préparation d'un projet à venir. Merci de nouveau à Louis de m'avoir dirigé vers le poste d'ATER que j'occupe cette année à Cergy, et sans lequel j'aurais probablement finalisé ma thèse dans des conditions plus précaires. Je remercie au passage Marjolaine Puel, Christophe Prange et tous les membres du laboratoire AGM de Cergy Paris Université pour leur accueil chaleureux.

Je remercie toutes les autres personnes, chercheurs, post-doctorants et doctorants, rencontrées lors de conférences, séminaires ou groupes de travail : Viet-Anh Nguyen, Fabrizio Bianchi, Ursula Ludwig, Masanori Adachi, Séverine Biard, Andrei Iordan, Cesar Joița, Bingxiao Liu, Nikhil Savale, Duc-Viet Vu, Ood Shabtai, Hendrik Herrmann, Pierre Lazag, Adrien Boulanger et tous les autres participants du JMP, Bertrand Deroin, Jules Martel-Tordjman, Lamine Messaci, Paul Boureau, Xingfeng Sang, Wei-Chuan Shen, Matteo Palmieri, Lukas Juozulynas. Je présente mes excuses à celles et ceux qui, par oubli, ne figureraient pas dans cette liste.

Merci à Yihui Li, Guangzhe Xu et Yuxiang Li, avec qui j'ai partagé cette expérience

de thèse sous la direction commune de Xiaonan Ma et fait une partie du chemin.

Dans le cadre de mes missions d'enseignement, à l'Université Paris Cité et à Cergy Paris Université, j'ai pu travailler avec des enseignants et enseignants-chercheurs que je remercie pour nos échanges pédagogiques, en particulier Samy Abbes, Nicolas Arancibia Robert, Yves Capdebosc, Sedki Boughattas, Abderrahim Bourhattas, Cosmin Burtea, Amina Mecherbet, Maxime Pelletier, Cathy Swaenepoel et Emmanuel Zongo.

Je tiens à saluer le travail des gestionnaires de l'équipe Algèbres d'Opérateurs et des personnels administratifs de l'Université Paris Cité. Je suis particulièrement reconnaissant envers Julia Roux de l'École Doctorale Mathématique de Paris Centre pour sa réactivité et son suivi dans l'organisation de la soutenance.

Ces remerciements vont également aux doctorants et doctorantes que j'ai côtoyés pendant ces années de thèse, dont Dorian Martino, Maxime Chatal, Romain Sieuzac, Farouk Mangat, Skander Charfi, Fabien Hoareau, Pierre Gervais, Alexandre Girodroux-Lavigne, William Gaudelier, Élie Studnia, Marie-Camille Delarue, Juan Ramón Gómez Garcia, Corentin Correira, Paul Lebreton, j'ajoute tout naturellement à cette liste mes compagnons de bureau successifs Andrei Bengus-Lasnier, Maud Szusterman, Wenhao Zhu, Edward Cotto-Mora, Agathe Rolland, Brian Flanagan, Ricardo Canesin, Enzo Tanguide, You Xinrui et Alfonso Garmendia. Je présente mes excuses à celles et ceux que j'aurais oublié.

Comment ne pas mentionner Jérôme, pilier du labo et gardien en chef de la bibliothèque, merci pour tes conseils en course à pied, pour m'avoir fait découvrir Jaworski, et pour ces moments où j'assistais à tes parties de GeoGuessr en passant emprunter un livre.

Je n'aurais pas fait le choix d'étudier les mathématiques sans les cours de nombreux professeurs qui m'ont beaucoup apporté, et dont l'approche pédagogique et la bienveillance restent à mes yeux un modèle à suivre. Je remercie tout particulièrement Patrick Cabau au lycée, François Moulin en classe préparatoire puis, à Rennes, Christophe Dupont et Benoît Claudon dont les cours d'analyse complexe et de géométrie complexe ont contribué à m'engager dans cette thèse.

Merci à Dorian, Thomas et Xingfeng pour votre amitié, nos séances de cinéma et de jeux de société, ainsi que tous ces moments de détente qui m'ont permis de respirer. Merci également à Jean-Baptiste, David, Nicolas, Paul, Charles, Charlie, Pierre, Clément et Cyril pour le temps passé ensemble.

Ein herzliches Dankeschön an Ellie, Birgit, Cora, Michael und Holger. Es ist immer wieder schön, euch in Köln zu besuchen.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude au Dr Lebard de m'avoir accompagné dans une période difficile et aidé à traverser des épreuves.

Je remercie enfin chaleureusement ma famille, tout particulièrement mes parents, mes grands-parents et ma sœur pour leur affection et leur soutien tout au long de mon parcours.

Table des matières

1	Introduction	15
1.1	Quantification de Berezin-Toeplitz sur une variété symplectique	15
1.1.1	Préliminaires	16
1.1.2	Trou spectral pour le laplacien de Bochner renormalisé	23
1.1.3	Le noyau de Bergman généralisé et son asymptotique	29
1.1.4	Opérateurs de Toeplitz	35
1.2	Noyau de Bergman sur une surface de Riemann épointée	37
1.2.1	Définitions	38
1.2.2	Comportement du noyau de Bergman près des ponctions	40
1.3	Présentation des travaux effectués	41
1.3.1	Opérateurs de Toeplitz avec symbole une fonction indicatrice	41
1.3.2	Formes de Fubini-Study sur une surface de Riemann épointée . . .	42
2	Asymptotics for Toeplitz operators with symbol an indicator function on a symplectic manifold	43
2.1	Introduction	43
2.2	The case of the Bargmann space	51
2.2.1	Toeplitz operator with symbol the indicator of the half-plane $\mathbb{H}_s$. .	52
2.2.2	Exponential decay in s	55
2.3	Bergman kernel asymptotics	57
2.3.1	Off-diagonal asymptotics of the generalized Bergman kernel	58
2.3.2	Generalized Bergman kernel in Fermi coordinates	59
2.3.3	Asymptotics of the diffeomorphism between Fermi and normal coordinates	63
2.3.4	Generalized Bergman kernel asymptotics in Fermi coordinates . . .	65
2.4	Asymptotics for the Toeplitz operator $T_{W,p}$	69
2.4.1	Kernel asymptotics for $T_{W,p}$ and proof of Theorem 2.1	69
2.4.2	Proof of Theorem 2.3	74
2.4.3	Trace asymptotics for $T_{W,p}$, proofs of Corollary 2.4 and Corollary 2.5	78

TABLE DES MATIÈRES

2.4.4	Proof of Lemma 2.25	80
3	Fubini–Study forms on punctured Riemann surfaces	85
3.1	Introduction	85
3.2	Proof of Theorem 3.2 and Corollary 3.3	89
3.2.1	Proof of Theorem 3.2	89
3.2.2	Proof of Lemma 3.4.	91
3.2.3	Proof of Corollary 3.3	99

1 | Introduction

1.1 Quantification de Berezin-Toeplitz sur une variété symplectique

En mécanique hamiltonienne, l'espace des phases est une variété symplectique (X, ω) . Le processus de quantification consiste à munir (X, ω) d'un espace de Hilbert H . L'objectif est d'associer à des fonctions sur X , vues comme des observables classiques (par exemple, la position, l'énergie cinétique), des opérateurs vus comme des observables quantiques, agissant sur l'espace H des états quantiques (i.e., des fonctions d'onde). On souhaite de plus que cette transformation vérifie certaines règles de compatibilité entre le formalisme hamiltonien et le formalisme quantique (voir [1, Section 1.1]). Cependant, il n'existe pas de manière canonique de quantifier la variété symplectique (X, ω) .

Dans la théorie de la *quantification géométrique*, introduite indépendamment par Kostant [29], et Souriau [43], la variété (X, ω) est *préquantifiée* : elle est dotée d'un *fibré en droites préquantique*, qui est un fibré en droites L au-dessus de X dont la forme de courbure coïncide avec la forme symplectique. Une manière de quantifier une variété symplectique préquantifiée est donnée par la *quantification de Berezin–Toeplitz*. Dans ce cadre, on ne travaille plus avec un seul espace de Hilbert, mais avec une famille d'espaces $(H_p)_{p \geq 1}$, où les éléments de H_p sont des sections de la p -ième puissance tensorielle de L . Le paramètre p ainsi introduit peut être interprété comme l'inverse de la constante de Planck renormalisée $\hbar = h/2\pi$. On associe alors à une observable f sur X une famille d'opérateurs $T_{f,p}$, agissant sur H_p , que l'on appelle sa *quantification de Berezin–Toeplitz* ou aussi l'*opérateur de Toeplitz* de symbole f . Ces opérateurs vérifient une condition de compatibilité entre les formalismes de la mécanique quantique et de la mécanique hamiltonienne dans la *limite semi-classique* $p \rightarrow +\infty$, connue sous le nom de *principe de correspondance*, qui prend la forme suivante :

$$[T_{f,p}, T_{g,p}] = \frac{\sqrt{-1}}{p} T_{\{f,g\},p} + \mathcal{O}(p^{-2}), \quad (1.1)$$

où $\{f, g\}$ désigne le *crochet de Poisson* de f et g . La formule ci-dessus a initialement été établie par Bordemann–Meinrenken–Schlichenmaier [12] dans le cas où (X, ω) est

CHAPITRE 1

une variété kählérienne compacte, en utilisant des techniques développées par Boutet de Monvel–Sjöstrand [15] et Boutet de Monvel–Guillemin [14]. De plus, Schlichenmaier [42] dans le cas kählérien compact, puis Ma–Marinescu [36] dans le cas symplectique, ont prouvé l’existence d’un développement asymptotique complet pour la composée $T_{f,p} \circ T_{g,p}$, dont une conséquence particulière est l’obtention des termes supplémentaires dans le développement (1.1).

L’objet de ce chapitre est d’énoncer les résultats relatifs au comportement asymptotique du noyau de Bergman et à la théorie des opérateurs de Toeplitz sur une variété symplectique à géométrie bornée. Nous suivons l’ouvrage de Ma–Marinescu [34], ainsi que les travaux de Dai–Liu–Ma [20], Ma–Marinescu [33], [36], [37], [38] et Kordyukov–Ma–Marinescu [28].

1.1.1 Préliminaires. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle $\mathbb{K}$ -fibré vectoriel sur une variété lisse X un fibré vectoriel lisse dont les fibres sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On utilisera également les terminologies *fibré vectoriel réel* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et *fibré vectoriel complexe* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu’un fibré vectoriel réel (resp. complexe) F est *euclidien* (resp. *hermitien*) s’il est muni d’une *métrique euclidienne* (resp. *hermitienne*) h^F , c’est-à-dire d’une famille lisse de produits euclidiens (resp. *hermitiens*) $h_x^F : F_x \times F_x \rightarrow \mathbb{K}$, $x \in X$. On notera (F, h^F) pour désigner le fibré F muni de la métrique h^F . Lorsque les changement de cartes d’un fibré vectoriel complexe F sont donnés par des biholomorphismes, on parlera de *fibré vectoriel holomorphe*.

Soit X une variété lisse orientable de dimension m , TX son fibré tangent et T^*X son fibré dual. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\Omega^k(X) := \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^k(T^*X))$ l’ensemble des k -formes différentielles sur X . On utilisera la notation $\wedge$ pour le produit extérieur sur $\Omega^k(X)$ et $d : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X)$ la différentielle extérieure. Étant donné F un $\mathbb{K}$ -fibré vectoriel sur X , on définit par $\Omega^k(X, F) := \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^k(T^*X) \otimes F)$ l’ensemble k -formes différentielles sur X à valeurs dans F . Dans ce qui suit, on suppose que X est une variété riemannienne dont on note la métrique $g^{TX} : TX \times TX \rightarrow \mathbb{R}$. On note ∇^{TX} la connexion de Levi–Civita pour g^{TX} et dv_X la forme volume riemannienne associée à g^{TX} . Soit (F, h^F) un fibré vectoriel euclidien (resp. hermitien) sur X . Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F}$ la métrique sur $\Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F$ venant de h^F et g^{TX} . Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F}$ induit sur $\Omega_0^\bullet(X, F) := \mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F)$, l’espace des sections lisses à support compact de $\Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F$, le produit scalaire (resp. hermitien) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle s_1, s_2 \rangle := \int_X \langle s_1(x), s_2(x) \rangle_{\Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F} dv_X(x), \quad s_1, s_2 \in \Omega_0^\bullet(X, F). \quad (1.2)$$

Nous noterons par $L^2(X, \Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F)$ le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda^\bullet(T^*X) \otimes F)$ pour la norme $\| \cdot \|_{L^2}$ induite par (1.2).

Connexions sur un fibré vectoriel. Soit $F \rightarrow X$ un $\mathbb{K}$ -fibré vectoriel. On rappelle la définition d'une connexion sur F .

Définition 1.1. Une connexion sur F est une application $\mathbb{K}$ -linéaire $\nabla^F : \mathcal{C}^\infty(X, F) \rightarrow \Omega^1(X, F)$ telle que

$$\nabla^F(\varphi s) = d\varphi \otimes s + \varphi \nabla^F s, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X), s \in \mathcal{C}^\infty(X, F). \quad (1.3)$$

Soit ∇^F une connexion sur F . Alors ∇^F se prolonge en $\nabla^F : \Omega^\bullet(X, F) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(X, F)$ vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla^F(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^k \alpha \wedge \nabla^F \theta, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(X), \theta \in \Omega^{k'}(X, F), \quad (1.4)$$

où $\wedge$ désigne le produit extérieur. Une conséquence de (1.4) est la formule suivante :

$$\begin{aligned} \nabla^F \alpha(U, V) &= \nabla_U^F \alpha(V) - \nabla_V^F \alpha(U) - \alpha([U, V]), \\ \text{avec } \alpha &\in \Omega^1(X, F), U, V \in \mathcal{C}^\infty(X, TX). \end{aligned} \quad (1.5)$$

D'après la règle de Leibniz, la différence de deux connexions sur F est $\mathcal{C}^\infty(X)$ -linéaire et s'identifie ainsi à un élément de $\Omega^1(X, \text{End}(F))$. De même, d'après (1.4), l'application $(\nabla^F)^2 : \mathcal{C}^\infty(X, F) \rightarrow \Omega^2(X, F)$ est $\mathcal{C}^\infty(X)$ -linéaire et définit ainsi une 2-forme $R^F \in \Omega^2(X, \text{End}(F))$ appelée *courbure* de la connexion ∇^F . D'après (1.5) on a

$$R^F(U, V)s = \nabla_U^F \nabla_V^F s - \nabla_V^F \nabla_U^F s - \nabla_{[U, V]}^F s, \quad \forall U, V \in \mathcal{C}^\infty(X, TX), s \in \mathcal{C}^\infty(X, F). \quad (1.6)$$

Soient F, F' deux fibrés vectoriels sur X munis de connexions $\nabla^F, \nabla^{F'}$. On rappelle que ∇^F et $\nabla^{F'}$ induisent sur $F \otimes F'$ la connexion tensorielle $\nabla^{F \otimes F'}$ définie par

$$\nabla^{F \otimes F'} = \nabla^F \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{F'}. \quad (1.7)$$

Définition 1.2. On suppose que (F, h^F) est un fibré vectoriel euclidien (resp. hermitien). On dit d'une connexion $\nabla^F : \mathcal{C}^\infty(X, F) \rightarrow \Omega^1(X, F)$ sur F qu'elle préserve la métrique h^F si elle vérifie, pour tout $V \in \mathcal{C}^\infty(X, TX)$, $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^\infty(X, F)$,

$$V h^F(s_1, s_2) = h^F(\nabla_V^F s_1, s_2) + h^F(s_1, \nabla_V^F s_2). \quad (1.8)$$

Lorsque (F, h^F) est un fibré vectoriel euclidien (resp. hermitien), une connexion sur F vérifiant (1.8) est appelée *connexion euclidienne* (resp. *hermitienne*). Par exemple, la connexion de Levi-Civita ∇^{TX} est euclidienne sur (TX, g^{TX}) .

CHAPITRE 1

Structure spin^c et connexion de Clifford Nous suivons [34, Section 1.3.1] et [33]. On suppose que (X, g^{TX}) est de dimension paire $m = 2n$ et munie d'une structure presque complexe, i.e. d'une application $J \in \text{End}(TX)$, vérifiant $J^2 = -\text{Id}$. On supposera également J compatible avec g^{TX} , c'est-à-dire

$$g^{TX}(J\cdot, J\cdot) = g^{TX}(\cdot, \cdot). \quad (1.9)$$

L'application J s'étend par $\mathbb{C}$ -linéarité sur $TX \otimes \mathbb{C}$ et induit la décomposition en somme directe

$$TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X, \quad (1.10)$$

$$T^{(1,0)}X := \text{Ker}\{J - \sqrt{-1}\text{Id}\}, \quad T^{(0,1)}X := \text{Ker}\{J + \sqrt{-1}\text{Id}\}.$$

Les projections de $TX \otimes \mathbb{C}$ sur $T^{(1,0)}X$ et $T^{(0,1)}X$ sont données respectivement par les applications

$$P^{1,0} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-1}J), \quad P^{0,1} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1}J). \quad (1.11)$$

Pour $U = V + \sqrt{-1}W \in TX \otimes \mathbb{C}$, $V, W \in TX$, on note $\bar{U} = V - \sqrt{-1}W \in TX \otimes \mathbb{C}$. Si $U \in T^{(1,0)}X$, on a $\bar{U} \in T^{(0,1)}X$.

On étend la métrique riemannienne g^{TX} par $\mathbb{C}$ -linéarité sur $TX \otimes \mathbb{C}$. Alors g^{TX} induit sur $T^{(1,0)}X$ (resp. $T^{(0,1)}X$) une métrique hermitienne $h^{(1,0)}$ (resp. $h^{(0,1)}$) donnée par $g^{TX}(U, \bar{V})$ pour $U, V \in T^{(1,0)}X$ (resp. $U, V \in T^{(0,1)}X$).

On étend également la connexion ∇^{TX} par $\mathbb{C}$ -linéarité à $TX \otimes \mathbb{C}$. Comme ∇^{TX} préserve g^{TX} , la connexion $\nabla^{1,0} := P^{1,0}\nabla^{TX}P^{1,0}$ sur $T^{(1,0)}X$ préserve $h^{1,0}$. De même, la connexion $\nabla^{0,1} := P^{0,1}\nabla^{TX}P^{0,1}$ sur $T^{(0,1)}X$ préserve $h^{0,1}$.

On note $T^{*(1,0)}X$ et $T^{*(0,1)}X$ les fibrés duaux de $T^{(1,0)}X$, $T^{(0,1)}X$. Le fibré $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$ est $\mathbb{Z}_2$ -gradué par la décomposition $\Lambda(T^{*(0,1)}X) = \Lambda^{\text{pair}}(T^{*(0,1)}X) \oplus \Lambda^{\text{impair}}(T^{*(0,1)}X)$, et pour $v = v^{(1,0)} + v^{(0,1)} \in T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X$, on définit l'action de Clifford $c(v)$ de v sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$ par

$$c(v)\alpha := \sqrt{2} \left(\bar{v}^{(1,0),*} \wedge \alpha - \iota_{v^{(0,1)}} \alpha \right), \quad \alpha \in \Lambda(T^{*(0,1)}X). \quad (1.12)$$

Ici, ι désigne la contraction et $\bar{v}^{(1,0),*} \in T^{*(0,1)}X$ le dual métrique de $\bar{v}^{(1,0)}$ pour g^{TX} . On vérifie la formule

$$c(U)c(V) + c(V)c(U) = -2 \langle U, V \rangle, \quad U, V \in TX. \quad (1.13)$$

On munit $\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{0,\bullet}(T^*X))$ de la métrique définie en (1.2). Alors d'après [34, Section 1.3.1], il existe une connexion hermitienne ∇^{Cl} sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$ dite *connexion de Clifford* au sens où, d'une part, elle préserve la $\mathbb{Z}_2$ -graduation de $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$ et, d'autre part, elle

est compatible avec l'action de Clifford, c'est-à-dire

$$[\nabla_V^{\text{Cl}}, c(W)] = c(\nabla_V^{TX} W), \quad \forall V, W \in \mathcal{C}^\infty(X, TX). \quad (1.14)$$

En suivant [33] et [34, Section 1.3.1], nous allons donner une formule locale pour ∇^{Cl} dans un repère adapté à la décomposition (1.10). Soit $\{w_k\}_{k=1}^n$ un repère orthonormé local de $T^{(1,0)}X$ et $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^n$ le repère de $T^{(0,1)}X$ associé. Notons $\{w^k\}_{k=1}^n$ le repère dual de $\{w_k\}_{k=1}^n$ et $\{\bar{w}^k\}_{k=1}^n$ le repère dual de $\{\bar{w}_k\}_{k=1}^n$. On considère le repère orthonormé $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ de TX défini par

$$e_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k + \bar{w}_k), \quad e_{2k} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(w_k - \bar{w}_k). \quad (1.15)$$

Soit $\Gamma^{TX} \in T^*X \otimes \text{End}(TX)$ la 1-forme de connexion de ∇^{TX} dans le repère $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$, c'est-à-dire telle que dans ce repère

$$\nabla_{e_i}^{TX} e_j = \Gamma(e_i) e_j. \quad (1.16)$$

On considère ∇^{det} la connexion induite sur $\det(T^{1,0}X)$ par $\nabla^{1,0}$. La connexion ∇^{det} est hermitienne pour la métrique induite par $h^{1,0}$ sur $\det(T^{1,0}X) = \Lambda^n(T^{(1,0)}X)$. Soit Γ^{det} la 1-forme de connexion de ∇^{det} dans le repère $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$. On vérifie

$$\nabla^{\text{det}}(w_1 \wedge \dots \wedge w_n) = \Gamma^{\text{det}} w_1 \wedge \dots \wedge w_n, \quad \Gamma^{\text{det}} = \sum_{k=1}^n \langle \Gamma^{TX}(\cdot) w_k, \bar{w}_k \rangle. \quad (1.17)$$

D'après [34, Section 1.3.1], la connexion ∇^{Cl} est définie localement par

$$\nabla^{\text{Cl}} = d + \frac{1}{4} \sum_{i,j} \langle \Gamma^{TX}(\cdot) e_i, e_j \rangle c(e_i) c(e_j) + \frac{1}{2} \Gamma^{\text{det}}. \quad (1.18)$$

avec $c(\Gamma) \in T^*X \otimes \text{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X))$. On considère la connexion $\nabla^\oplus := \nabla^{1,0} \oplus \nabla^{0,1}$. Soit $\Gamma^\oplus$ la forme de connexion de $\nabla^\oplus$ dans le repère local $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$, soit $A_2 \in \Omega^1(X, \Lambda(T^{*(0,1)}X))$ définie par $A_2 := \nabla^{TX} - \nabla^\oplus$. Alors $\Gamma = \Gamma^\oplus + A_2$ et d'après (1.12), en suivant [34, (1.3.3)] et [33, (2.3)], on a :

$$\begin{aligned} \nabla^{\text{Cl}} = d + \sum_{k,l} \left(\langle \Gamma^\oplus w_k, \bar{w}_l \rangle \bar{w}^k \wedge \iota_{\bar{w}_l} + \frac{1}{2} \langle A_2 w_k, w_l \rangle \iota_{\bar{w}_k} \iota_{\bar{w}_l} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \langle A_2 \bar{w}_k, \bar{w}_l \rangle \bar{w}^k \wedge \bar{w}^l \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dans la formule ci-dessus, il est important de noter que A_2 a toujours un sens global.

CHAPITRE 1

Connexion de Chern Lorsque (F, h^F) est un fibré vectoriel holomorphe hermitien et (X, J) une variété complexe, l'opérateur de Dolbeault $\bar{\partial}^F : \Omega^{\bullet, \bullet}(X, F) \rightarrow \Omega^{\bullet, \bullet+1}(X, F)$ est bien défini, vérifie $(\bar{\partial}^F)^2 = 0$ et $\bar{\partial}^F$ s'annule sur les sections holomorphes de F . Il existe alors une unique connexion ∇^F hermitienne sur (F, h^F) telle que ∇^F est *holomorphe*, c'est-à-dire

$$\nabla_U^F s = \iota_U (\bar{\partial}^F s), \quad \forall U \in T^{(0,1)}X, \quad s \in \mathcal{C}^\infty(X, F). \quad (1.20)$$

On appelle la connexion ∇^F la *connexion de Chern* de (F, h^F) .

Opérateurs différentiels. Soit (F, h^F) un fibré euclidien ou hermitien sur (X, g^{TX}) , et ∇^F une connexion qui préserve h^F .

Définition 1.3. On dit qu'un opérateur D défini sur $\mathcal{C}^\infty(X, F)$ est un opérateur différentiel d'ordre q si D s'écrit localement sous la forme

$$D = f + \sum_{k=1}^q b_k \nabla_{V_{1,k}}^F \cdots \nabla_{V_{k,k}}^F, \quad (1.21)$$

avec $f, b_k \in \mathcal{C}^\infty(X, \text{End}(F))$, $V_{i,k} \in \mathcal{C}^\infty(X, TX)$,

et si le terme pour $k = q$ dans la somme ci-dessus est non nul.

Dans ce qui suit, on introduit les opérateurs différentiels qui interviendront régulièrement dans ce chapitre et dans la suite du manuscrit.

Laplacien de Bochner Soit (F, h^F) un fibré vectoriel euclidien ou hermitien sur (X, g^{TX}) . Le *laplacien de Bochner* est l'opérateur non borné défini sur $\mathcal{C}_0^\infty(X, F)$ par la formule

$$\Delta^F := (\nabla^F)^* \nabla^F, \quad (1.22)$$

où $(\nabla^F)^* : \Omega^1(X, F) \rightarrow \Omega^0(X, F)$ désigne l'adjoint formel de ∇^F pour la métrique (1.2) venant de h^F et g^{TX} . Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ un repère orthonormé local de (TX, g^{TX}) . On a l'égalité

$$\Delta^F = - \sum_{i=1}^m \left[\left(\nabla_{e_i}^F \right)^2 - \nabla_{\nabla_{e_i}^{TX} e_i}^F \right]. \quad (1.23)$$

L'opérateur Δ^F est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2. Lorsque la variété (X, g^{TX}) est supposée complète, le laplacien de Bochner a la propriété d'être un opérateur essentiellement autoadjoint (voir [28, Théorème 2.4], [34, Corollaire 3.3.3, Corollaire 3.3.4]).

Opérateur de Dirac-spin^c Soit (F, h^F, ∇^F) un fibré vectoriel hermitien sur une variété riemannienne (X, g^{TX}) de dimension paire $2n$ munie d'une structure presque complexe J

compatible avec g^{TX} . L'opérateur de Dirac-spin^c est défini localement par

$$D^c := \sum_{i=1}^{2n} c(e_i) \nabla_{e_i}^{\text{Cl}, F} : \Omega^{0, \bullet}(X, F) \rightarrow \Omega^{0, \bullet}(X, F). \quad (1.24)$$

Rappelons que les termes $c(e_i)$ correspondent à l'action de Clifford introduite en (1.12). Ici $\nabla^{\text{Cl}, F}$ désigne la connexion de Clifford induite par ∇^{Cl} et ∇^F sur le produit tensoriel $\Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}X) \otimes F$. L'opérateur D^c est un opérateur elliptique d'ordre 1, formellement autoadjoint pour la métrique sur $\Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}X) \otimes F$ venant de g^{TX} et h^F .

Soit $\Delta^{\text{Cl}, F} = (\nabla^{\text{Cl}, F})^* \nabla^{\text{Cl}, F}$ le laplacien de Bochner associé à $\nabla^{\text{Cl}, F}$, agissant sur $\mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda^{0, \bullet}(T^*X) \otimes F)$. Nous notons r^X la courbure scalaire de (X, g^{TX}) . L'opérateur D^c vérifie la *formule de Lichnerowicz*, telle qu'énoncée dans [9, Théorème 3.52], [33, Théorème 2.2],

$$\begin{aligned} (D^c)^2 &= \Delta^{\text{Cl}, F} + \frac{r^X}{4} + {}^c R^F + \frac{1}{2} {}^c R^{\det}, \\ \text{avec } {}^c R^F &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j} R^F(e_i, e_j) c(e_i) c(e_j), \\ \text{et } {}^c R^{\det} &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \text{Tr} [R^{T^{(1,0)}X}] (e_i, e_j) c(e_i) c(e_j), \end{aligned} \quad (1.25)$$

où $R^{T^{(1,0)}X} \in \Omega^2(X, \text{End}(T^{(1,0)}X))$, $R^F \in \Omega^2(X, \text{End}(F))$ désignent les courbures des connexions $\nabla^{1,0}$, ∇^F et la trace dans l'expression de $R^{\det}$ correspond à la trace sur la partie $\text{End}(T^{(1,0)}X)$.

Remarque 1.4. L'action de Clifford définie en (1.12) échange les degré pairs et impairs dans la $\mathbb{Z}_2$ -graduation $\Lambda(T^{*(0,1)}X) = \Lambda^{\text{pair}}(T^{*(0,1)}X) \oplus \Lambda^{\text{impair}}(T^{*(0,1)}X)$, et la connexion de Clifford $\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E}$ préserve la $\mathbb{Z}_2$ -graduation. Ainsi, l'opérateur de Dirac défini par (1.24) est tel que

$$\begin{aligned} D_p^+ &:= D_p|_{\Omega^{0, \text{pair}}(X, F)} : \Omega^{0, \text{pair}}(X, F) \rightarrow \Omega^{0, \text{impair}}(X, F) \\ D_p^- &:= D_p|_{\Omega^{0, \text{impair}}(X, F)} : \Omega^{0, \text{impair}}(X, F) \rightarrow \Omega^{0, \text{pair}}(X, F). \end{aligned} \quad (1.26)$$

En particulier, l'opérateur D_p^2 préserve la $\mathbb{Z}_2$ -graduation de $\Omega^{0, \bullet}(X, F)$.

Laplacien de Bochner renormalisé Soit (X, ω) une variété symplectique, c'est-à-dire munie d'une 2-forme réelle fermée $\omega \in \Omega^2(X)$ telle que $\omega(\cdot, \cdot)$ est non-dégénérée, i.e. pour tout $x \in X$, on vérifie $\{V \in T_x X : \forall U \in T_x X, \omega(U, V) = 0\} = \{0\}$.

Définition 1.5. Soit (L, h^L) un fibré en droites hermitien sur (X, ω) . On dit que (X, ω) est préquantifiée par (L, h^L) ou que (L, h^L) est un fibré en droites préquantique sur (X, ω) , si on a

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L = \omega. \quad (1.27)$$

CHAPITRE 1

On se donne (L, h^L) un fibré en droite préquantique sur (X, ω) et (E, h^E) un fibré vectoriel hermitien sur X , munis respectivement de connexions hermitiennes ∇^E, ∇^L . Soit J une structure presque complexe sur X compatible avec ω et g^{TX} , i.e. $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$ et $g^{TX}(J\cdot, J\cdot) = g^{TX}(\cdot, \cdot)$. Soit $J_0 \in \text{End}(TX)$ l'application définie par

$$\omega(u, v) = g^{TX}(J_0 u, v), \quad u, v \in TX. \quad (1.28)$$

Le *laplacien de Bochner renormalisé* Δ_p agissant sur les sections de $L^p \otimes E$ a été initialement introduit par Guillemin–Uribe [25] et est défini par

$$\Delta_p := \Delta^{L^p \otimes E} - p\tau, \quad \text{avec} \quad \tau(x) := -\pi \text{Tr} [J_0(x)J(x)], \quad x \in X, \quad (1.29)$$

où $\Delta^{L^p \otimes E}$ désigne le laplacien de Bochner agissant sur les sections de $L^p \otimes E$. Le laplacien de Bochner étant essentiellement auto-adjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$, comme $\tau \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, c'est aussi le cas du laplacien de Bochner renormalisé.

Laplacien de Kodaira Soit (F, h^F) un fibré holomorphe hermitien sur (X, J) une variété complexe. On munit X d'une métrique riemannienne g^{TX} compatible avec J . Soit $\bar{\partial}^F$ l'opérateur de Dolbeault. On note $\bar{\partial}^{F,*}$ l'adjoint formel de $\bar{\partial}^F$ pour la métrique sur $\Omega^{0,\bullet}(X, F)$ définie comme dans (1.2) en remplaçant $\Lambda^\bullet(T^*X)$ par $\Lambda^{0,\bullet}(T^*X)$. Le *laplacien de Kodaira* est défini sur $\Omega^{0,\bullet}(X, F)$ par

$$\square^F := \bar{\partial}^F \bar{\partial}^{F,*} + \bar{\partial}^{F,*} \bar{\partial}^F. \quad (1.30)$$

L'opérateur $\square^F$ est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2 agissant sur $\Omega^{0,\bullet}(X, F)$. D'après [34, Corollaire 3.3.3], $\square^F$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{C}_0^\infty(X, F)$. Notons

$$D^F := \sqrt{2} \left(\bar{\partial}^F + \bar{\partial}^{F,*} \right), \quad (1.31)$$

alors l'opérateur différentiel d'ordre un D vérifie $(D^F)^2 = 2\square^F$. On définit par

$$H^{0,q}(X, F) := \frac{\text{Ker } \bar{\partial}^F|_{\Omega^{0,q}}}{\text{Im } \bar{\partial}^F|_{\Omega^{0,q-1}}}, \quad (1.32)$$

le q -ème groupe de cohomologie du *complexe de Dolbeault* $(\Omega^{0,\bullet}(X, F), \bar{\partial}^F)$. On énonce le *théorème de Hodge* (voir [34, Théorème 1.4.1]) :

Théorème 1.6 (Hodge). *Supposons X compacte. Pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a la décomposition en somme directe suivante*

$$\Omega^{0,q}(X, F) = \text{Ker} \left(D^F|_{\Omega^{0,q}(X, F)} \right) \oplus \text{Im} \left(\bar{\partial}^F|_{\Omega^{0,q-1}(X, F)} \right) \oplus \text{Im} \left(\bar{\partial}^{F,*}|_{\Omega^{0,q+1}(X, F)} \right), \quad (1.33)$$

et l'isomorphisme

$$\text{Ker } \square^F|_{\Omega^{0,q}} \simeq \text{Ker } D^F|_{\Omega^{0,q}} \simeq H^{0,q}(X, F). \quad (1.34)$$

Remarque 1.7. On suppose que (X, J, ω) est une variété kählérienne, c'est-à-dire telle que J est intégrable (i.e., $T^{(1,0)}X$ est stable par crochet de Lie), et $J = J_0$.

- (i) Si (F, h^F) est un fibré holomorphe hermitien sur X , on a $D^c = D^F = \sqrt{2}(\bar{\partial}^F + \bar{\partial}^{F,*})$.
- (ii) Si (L, h^L) , (E, h^E) sont holomorphes hermitiens sur X , on a $\tau = 2n\pi$ et $\Delta_p s = 2\square^{L^p \otimes E} s$ pour $s \in \mathcal{C}^\infty(X, L^p \otimes E)$.

1.1.2 Trou spectral pour le laplacien de Bochner renormalisé. L'objet de cette section est d'exposer la preuve de Ma–Marinescu [33, Corollaire 1.2] du trou spectral pour le laplacien de Bochner renormalisé. On considère (X, ω) une variété symplectique de dimension $m = 2n$, (L, h^L, ∇^L) un fibré en droites hermitien qui préquantifie (X, ω) , et (E, h^E, ∇^E) un fibré vectoriel hermitien sur X . Nous rappelons que, par définition,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L = \omega. \quad (1.35)$$

On munit (X, ω) d'une métrique riemannienne complète g^{TX} , et de J une structure presque complexe sur X compatible avec ω et g^{TX} . On suppose que (X, L, E) est à géométrie bornée : le rayon d'injectivité inj^X de (X, g^{TX}) est strictement positif et les dérivées à tout ordre de R^L, R^E, J, g^{TX} sont uniformément bornées sur X . On suppose de plus

$$\mu_0 := \inf_{\substack{x \in X \\ u \in T_x X \setminus \{0\}}} \frac{\sqrt{-1} R_x^L(u, J(x)u)}{|u|_{g^{TX}}^2} > 0. \quad (1.36)$$

D'après, [33, Corollaire 1.2], [28, Théorème 1.1], le laplacien de Bochner renormalisé Δ_p défini en (1.29) admet un trou spectral, plus précisément :

Théorème 1.8 ([33, Corollaire 1.2], [28, Théorème 1.1]). *Il existe $C_L > 0$ tels que pour tout $p \in \mathbb{N}, p \gg 1$, le spectre de Δ_p vérifie*

$$\text{Spec}(\Delta_p) \subset [-C_L, C_L] \cup [2p\mu_0 - C_L, +\infty[. \quad (1.37)$$

Remarque 1.9. Dans le cas où (X, ω) est compacte, la propriété de trou spectral pour le laplacien de Bochner renormalisé Δ_p a d'abord été prouvée par Guillemin–Uribe [25, Théorème 2] lorsque le fibré E est trivial et repose sur une estimée due à Melin [26, Théorème 22.3.3, p.364]. La preuve de Ma–Marinescu [33, Corollaire 1.2] utilise une méthode plus directe, précise la valeur de μ_0 et étend le résultat au cas où le fibré E est non trivial. De plus, en suivant [28, Théorème 1.1], leur preuve s'adapte au cas où (X, L, E) est à géométrie bornée.

CHAPITRE 1

Nous détaillons à présent la preuve du Théorème 1.8 telle qu'exposée dans [33]. L'application J_0 introduite en (1.28) commute avec J et stabilise donc $T^{(1,0)}X$ et $T^{(0,1)}X$. Soit $\{w_j\}_{j=1}^n$ une base orthonormée locale de $T^{(1,0)}X$ qui diagonalise $J_0|_{T^{(1,0)}X}$, de sorte que dans cette base

$$J_0|_{T^{(1,0)}X}(x) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{Diag}(a_1(x), \dots, a_n(x)), \quad (1.38)$$

où d'après (1.35) et (1.36), on a

$$\mu_0 = \inf_{x \in X} \min_j (a_j(x)) > 0. \quad (1.39)$$

Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 2n}$ le repère orthonormé local de (TX, g^{TX}) obtenu à partir de $\{w_j\}_{j=1}^n$ comme dans (1.15). Une conséquence de (1.35) est l'égalité (voir [34, (1.5.17), (1.5.18), (1.5.19)])

$${}^c R^L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} R^L(e_i, e_j) c(e_i) c(e_j) = -2p\omega_d - p\tau, \quad (1.40)$$

$$\text{avec } \omega_d = - \sum_k a_k(x) \bar{w}^k \wedge \iota_{\bar{w}_k} \quad \text{et} \quad \tau(x) = -\pi \text{Tr} [J_0(x) J(x)] = \sum_{k=1}^n a_k(x).$$

Soit D_p l'opérateur de Dirac-spin^c sur le fibré $F = L^p \otimes E$. D'après (1.25) pour $F = L^p \otimes E$ et l'égalité $R^{L^p \otimes E} = pR^L \otimes 1 + 1 \otimes R^E$, l'opérateur D_p vérifie la formule de Lichnerowicz

$$\begin{aligned} D_p^2 &= \Delta^{\text{Cl}, L^p \otimes E} + \frac{r^X}{4} + p^c R^L + {}^c R^E + \frac{1}{2} {}^c R^{\det} \\ &= \Delta^{\text{Cl}, L^p \otimes E} + \frac{r^X}{4} - 2p\omega_d - p\tau + {}^c R^E + \frac{1}{2} {}^c R^{\det}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

En particulier, en écrivant $\Delta^{\text{Cl}, L^p \otimes E} = (\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E})^* \nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E}$ et d'après le caractère autoadjoint de D_p on obtient, pour $s \in \Omega_0^{0, \bullet}(X, L^p \otimes E)$,

$$\|D_p s\|^2 = \|\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E} s\|^2 - p \langle \tau s, s \rangle - 2p \langle \omega_d s, s \rangle + \left\langle \left(\frac{r^X}{4} + {}^c R^E + \frac{1}{2} {}^c R^{\det} \right) s, s \right\rangle. \quad (1.42)$$

On introduit $\Omega_0^{0, >0}(X, L^p \otimes E) := \bigoplus_{p \geq 1} \Omega_0^{0, p}(X, L^p \otimes E)$. En suivant la Remarque 1.4, on note respectivement D_p^+ et D_p^- les restrictions de D_p aux formes de degré pair et impair :

$$D_p^+ := D_p|_{\Omega_0^{0, \text{pair}}}, \quad D_p^- := D_p|_{\Omega_0^{0, \text{impair}}}. \quad (1.43)$$

Le lemme suivant, qui repose sur l'inégalité (1.42), joue un rôle clé dans la preuve du Théorème 1.8.

Lemme 1.10 ([33, Théorème 1.1, Corollaire 2.4, Théorème 2.5]). *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$,*

$$\left| \|D_p s\|^2 - \langle \Delta_p s, s \rangle \right| \leq C \|s\|^2. \quad (1.44)$$

De plus, pour tout $s \in \Omega_0^{0,>0}(X, L^p \otimes E)$, on a

$$\|D_p s\|^2 \geq (2p\mu_0 - C) \|s\|^2, \quad \text{et pour } p \text{ assez grand, } \text{Ker } D_p|_{\Omega_0^{0,\text{impair}}} = \{0\}. \quad (1.45)$$

De plus, l'opérateur D_p admet un trou spectral : il existe $C > 0, p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq p_0$,

$$\text{Spec}(D_p^2) \subset \{0\} \cup [2p\mu_0 - C, +\infty[. \quad (1.46)$$

Démonstration. Nous suivons [33, p.656-658]. On obtient d'après (1.19) l'égalité locale suivante, pour $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$,

$$\|\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E} s\|^2 = \|\nabla^{L^p \otimes E} s\|^2 + \left\| \frac{1}{2} \langle A_2 \bar{w}_k, \bar{w}_l \rangle \bar{w}^k \wedge \bar{w}^l \right\|^2. \quad (1.47)$$

On rappelle que A_2 a un sens global. On peut donc utiliser l'hypothèse de géométrie bornée et majorer globalement ce terme : il existe $C > 0$ tel que pour tout $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$,

$$\left| \|\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E} s\|^2 - \|\nabla^{L^p \otimes E} s\|^2 \right| \leq C \|s\|^2. \quad (1.48)$$

De plus, pour $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$, $\omega_d s = 0$, et on a

$$\|\nabla^{L^p \otimes E} s\|^2 - p \langle \tau s, s \rangle = \langle \Delta_p s, s \rangle. \quad (1.49)$$

Alors d'après (1.42), on trouve

$$\begin{aligned} \left| \|D_p s\|^2 - \langle \Delta_p s, s \rangle \right| &= \left| \|\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E} s\|^2 - \|\nabla^{L^p \otimes E} s\|^2 + \left\langle \left(\frac{r^X}{4} + {}^c R^E + \frac{1}{2} {}^c R^{\det} \right) s, s \right\rangle \right| \\ &\leq C \|s\|^2 + \left| \left\langle \left(\frac{r^X}{4} + {}^c R^E + \frac{1}{2} {}^c R^{\det} \right) s, s \right\rangle \right|. \end{aligned} \quad (1.50)$$

En appliquant l'hypothèse de géométrie bornée au second terme à droite de l'inégalité, quitte à changer la valeur de $C > 0$, on obtient (1.44).

Prouvons (1.45). On raisonne également à partir de la formule de Lichnerowicz. L'inéquation (1.44) donne en particulier, pour $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$,

$$\langle \Delta_p s, s \rangle \geq -C \|s\|^2. \quad (1.51)$$

CHAPITRE 1

Soit $s \in \Omega_0^{0,>0}(X, L^p \otimes E)$. L'inégalité ci-dessus appliquée au fibré $E' = E \otimes \Lambda^{0,\bullet} T^{*(0,1)} X$ et l'hypothèse (1.39) donnent

$$\langle \Delta_p s, s \rangle \geq -C \|s\|^2, \quad \text{et} \quad -\langle \omega_d s, s \rangle \geq \mu_0 \|s\|^2. \quad (1.52)$$

On obtient la majoration (1.45) en appliquant ces inégalités à (1.42).

Prouvons (1.46). Soit $\mu > 0$. Soit $\mathcal{H}_\mu = \mathcal{H}_\mu^+ \oplus \mathcal{H}_\mu^-$ l'espace spectral pour D_p^2 correspondant à l'intervalle $]0, \mu[$, avec $\mathcal{H}_\mu^+ := \mathcal{H}_\mu \cap \Omega^{0,\text{pair}}(X, L^p \otimes E)$, $\mathcal{H}_\mu^- := \mathcal{H}_\mu \cap \Omega^{0,\text{impair}}(X, L^p \otimes E)$. On rappelle que D_p^2 préserve la $\mathbb{Z}_2$ -graduation de $\Omega^{0,\bullet}(X, L^p \otimes E)$, et D_p échange les formes de degré pair et impair. Par ailleurs, D_p commute avec D_p^2 . Ainsi la restriction $D_p^+ : \mathcal{H}_\mu^+ \rightarrow \mathcal{H}_\mu^-$ de D_p à $\mathcal{H}_\mu^+$ commute avec D_p^2 , et est donc injective. Supposons $0 < \mu < 2p\mu_0 - C$. D'après (1.45), pour p assez grand, on a $\mathcal{H}_\mu^- = 0$ et, par injectivité de D_p^+ , on a $\mathcal{H}_\mu^+ = 0$, donc $\mathcal{H}_\mu = 0$, d'où (1.46). $\square$

Pour $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E)$, on désignera par $s^{[0]} \in \mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$ sa composante de degré 0, de sorte que $s^{[>0]} := s - s^{[0]} \in \Omega^{0,>0}(X, L^p \otimes E)$. L'application définie par

$$P_p^{[0]} : \mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E), \quad s \mapsto s^{[0]}, \quad (1.53)$$

induit sur $L^2(X, \Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E)$ une projection orthogonale pour la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E)$ à l'aide de (1.2). Le lemme suivant donne des estimées sur l'opérateur Δ_p sur des sous-espaces de $\mathcal{C}_0^\infty(X, L^p \otimes E)$ définis à partir de $\text{Ker } D_p^+$. La preuve du Lemme 1.11 repose sur la formule de Lichnerowicz mais en travaillant, cette fois, sur $\mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E)$.

Lemme 1.11. *Il existe $C_L, C > 0$, $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq p_0$, on a, pour tout $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E)$,*

$$\text{si } s \in \text{Ker } D_p^+, \quad \|s - P_p^{[0]} s\|_{L^2} \leq Cp^{-1/2} \|P_p^{[0]} s\|_{L^2}, \quad (1.54)$$

$$\text{si } s \in (\text{Ker } D_p^+)^\perp, \quad \langle \Delta_p s, s \rangle \geq (2p\mu_0 - C_L) \|s\|_{L^2}^2, \quad (1.55)$$

$$\text{si } s \in P_p^{[0]}(\text{Ker } D_p^+), \quad |\langle \Delta_p s, s \rangle| \leq C_L \|s\|_{L^2}^2. \quad (1.56)$$

Démonstration. Prouvons (1.54). On considère $s \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E)$ telle que $s \in \text{Ker } D_p^+$. D'après (1.42), on a

$$-2p \langle \omega_d s, s \rangle = -\|\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E} s\|^2 + p \langle \tau s, s \rangle - \left\langle \left(\frac{r^X}{4} + {}^c R^E + \frac{1}{2} {}^c R^{\det} \right) s, s \right\rangle. \quad (1.57)$$

En appliquant (1.48), il existe $C > 0$ tel que

$$-2p \langle \omega_d s, s \rangle \leq C \|s\|^2 - \|\nabla^{L^p \otimes E} s\|^2 + p \langle \tau s, s \rangle - \left\langle \left(\frac{r^X}{4} + {}^c R^E + \frac{1}{2} {}^c R^{\det} \right) s, s \right\rangle. \quad (1.58)$$

D'après (1.49) et la première inégalité de (1.52), en minorant le dernier terme à droite de l'inégalité ci-dessus, il existe $C > 0$ tel que

$$-2p \langle \omega_d s, s \rangle \leq C \|s\|^2. \quad (1.59)$$

En écrivant $s = s^{[0]} + s^{[>0]}$ dans l'inégalité ci-dessus et d'après la seconde inégalité de (1.52), pour $p \gg 1$ on obtient (1.54).

Prouvons (1.56). D'après (1.54) et (1.42), on a

$$\|\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E} s\|^2 - p \langle \tau s^{[0]}, s^{[0]} \rangle \leq C \|s^{[0]}\|^2. \quad (1.60)$$

D'après la formule (1.19), on vérifie localement

$$\nabla^{\text{Cl}, L^p \otimes E} s = \nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]} + \frac{1}{2} \langle A_2 w_k, w_l \rangle \iota_{\bar{w}_k} \iota_{\bar{w}_l} s^{[2]} + \alpha, \quad (1.61)$$

avec $\alpha \in \Omega_0^{0, >0}(X, L^p \otimes E)$ et $s^{[2]} \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \Lambda^2(T^{*(0,1)} X) \otimes L^p \otimes E)$ la composante de degré 2 de s . On rappelle que A_2 a un sens global. On notera $A'_2 s^{[2]}$ pour le terme du milieu à droite de l'égalité ci-dessus. En appliquant à (1.60),

$$\|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]} + A'_2 s^{[2]}\|^2 - p \langle \tau s^{[0]}, s^{[0]} \rangle \leq C \|s^{[0]}\|^2. \quad (1.62)$$

D'après (1.54) et l'égalité ci-dessus,

$$\|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]}\|^2 \leq Cp \|s^{[0]}\|^2. \quad (1.63)$$

En développant $\|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]} + A'_2 s^{[2]}\|^2$ par degré, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1.54) et l'inégalité ci-dessus,

$$\begin{aligned} \|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]} + A'_2 s^{[2]}\|^2 &\geq \|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]}\|^2 - 2 \|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]}\| \|A'_2 s^{[2]}\| \\ &\geq \|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]}\|^2 - C \|s^{[0]}\|^2. \end{aligned} \quad (1.64)$$

En combinant (1.62) et (1.64), on trouve

$$\|\nabla^{L^p \otimes E} s^{[0]}\|^2 - p \langle \tau s^{[0]}, s^{[0]} \rangle \leq C \|s^{[0]}\|^2. \quad (1.65)$$

CHAPITRE 1

En appliquant la première inégalité de (1.52) à l'inégalité ci-dessus, on obtient (1.56). $\square$

Preuve du Théorème 1.8 On commence par introduire la notion de *mesure spectrale* :

Définition 1.12 (voir [34, Appendice C.2, p.379]). *Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert. Soit $\text{Bor}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur H . Une application $E : \text{Bor}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ est appelée mesure spectrale si*

- (i) $E(\Omega) \in \mathcal{L}(H)$ est une projection orthogonale pour tout $\Omega \in \text{Bor}(\mathbb{R})$.
- (ii) $E(\emptyset) = 0$, $E(\mathbb{R}) = \text{Id}$.
- (iii) $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1)E(\Omega_2)$.
- (iv) Si $I \subset \mathbb{N}$ et $\Omega = \cup_{j \in I} \Omega_j$ tel que $j \neq i \Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, alors pour tout $u \in H$,

$$\left\| E(\Omega)u - \sum_{j \in I \cap [0, k]} E(\Omega_j)u \right\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \quad (1.66)$$

On admettra le *théorème spectral* :

Théorème 1.13 (voir [34, Théorème C.2.1]). *Tout opérateur $(A, \text{Dom}(A))$ auto-adjoint sur H admet une unique mesure spectrale E telle que*

$$\text{Dom}(A) = \left\{ u \in H : \int_{\mathbb{R}} t^2 d\langle E(t)u, u \rangle < \infty \right\}, \quad (1.67)$$

et pour $u \in \text{Dom}(A)$,

$$Au = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-k, k]}(t) t dE(t) \right) u =: \left(\int_{\mathbb{R}} t dE(t) \right) u. \quad (1.68)$$

Une fois munis de la notion de mesure spectrale et des estimées du Lemme 1.11, nous pouvons conclure la preuve du Théorème 1.8.

Démonstration. Commençons par noter que les résultats du Lemme 1.11 sont valables, par densité, pour des sections de $L^2(X, \Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes L^p \otimes E)$. D'après (1.54), pour $p \gg 1$, l'application $P_p^{[0]} : \text{Ker } D_p^+ \rightarrow P_p^{[0]}(\text{Ker } D_p^+)$ est bijective, de plus, $P_p^{[0]}(\text{Ker } D_p^+)$ est fermé dans $L^2(X, L^p \otimes E)$, et on a

$$L^2(X, L^p \otimes E) = P_p^{[0]}(\text{Ker } D_p^+) \oplus \left((\text{Ker } D_p^+)^{\perp} \cap L^2(X, L^p \otimes E) \right). \quad (1.69)$$

Les arguments utilisés ici viennent de la preuve de [34, Appendice C, Lemme C.3.1]. Nous rappelons que l'opérateur Δ_p est essentiellement autoadjoint. Soit

$$E_p : \text{Bor}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(X, L^p \otimes E)), \quad (1.70)$$

la mesure spectrale de la fermeture de Δ_p sur $L^2(X, L^p \otimes E)$. Pour $u \in L^2(X, L^p \otimes E)$, $\langle E_p u, u \rangle$ est une mesure sur $\mathbb{R}$ et on vérifie, d'après (1.68),

$$Q_p(u, u) := \langle \Delta_p u, u \rangle = \int_{\mathbb{R}} t \, d \langle E_p(t) u, u \rangle. \quad (1.71)$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $E_p(I) \in \mathcal{L}(L^2(X, L^p \otimes E))$ désigne le projecteur sur l'espace spectral pour Δ_p associé à l'intervalle I . Soit $u \in \text{Im}(E_p(I))$. D'après le point (i) de la Définition 1.12, $E_p(I)u = u$. D'après le point (iii) de la Définition 1.12, pour $\Omega \in \text{Bor}(\mathbb{R})$, $E_p(\Omega)u = E_p(\Omega)E_p(I)u = E_p(\Omega \cap I)u$. Ainsi, en appliquant à (1.71),

$$\forall u \in \text{Im}(E_p(I)), \quad Q_p(u, u) = \int_I t \, d \langle E_p(t) u, u \rangle. \quad (1.72)$$

En écrivant $\text{Ker}(E_p(I)) = \text{Im}(E_p(\mathbb{R} \setminus I))$, on a de même,

$$\forall u \in \text{Ker}(E_p(I)), \quad Q_p(u, u) = \int_{\mathbb{R} \setminus I} t \, d \langle E_p(t) u, u \rangle. \quad (1.73)$$

Soit $p \gg 1$ et $C_L > 0$ tel que dans le Lemme 1.11. On considère les projecteurs spectraux $E_{p, C_L} : P_p^{[0]}(\text{Ker } D_p^+) \rightarrow \text{Im}(E_p([-\infty, C_L]))$ et $E_{p, C_L}^\perp : (\text{Ker } D_p^+)^\perp \rightarrow \text{Im}(E_p([2p\mu_0 - C_L, +\infty[)))$. Nous allons montrer que E_{p, C_L} et $E_{p, C_L}^\perp$ sont injectifs.

Commençons par montrer l'injectivité de E_{p, C_L} . Soit $u \in P_p^{[0]}(\text{Ker } D_p^+)$, $u \neq 0$, tel que $u \in \text{Ker } E_{p, C_L} = \text{Im}(E_p([C_L, +\infty[)))$. Alors d'après (1.73), comme $u \neq 0$,

$$Q_p(u, u) = \int_{C_L}^{+\infty} t \, d \langle E_p(t) u, u \rangle > C_L \|u\|^2. \quad (1.74)$$

Cela contredit (1.56). On raisonne de même pour montrer l'injectivité de $E_{p, C_L}^\perp$. Soit $u \in (\text{Ker } D_p^+)^\perp$, $u \neq 0$, tel que $u \in \text{Ker } E_{p, C_L}^\perp = \text{Im}([-\infty, 2p\mu_0 - C_L])$. Alors, comme $u \neq 0$,

$$Q_p(u, u) = \int_{-\infty}^{2p\mu_0 - C_L} t \, d \langle E_p(t) u, u \rangle < (2p\mu_0 - C_L) \|u\|^2, \quad (1.75)$$

ce qui contredit (1.55). Donc $u = 0$ et $E_{p, C_L}^\perp$ est injectif.

Nous pouvons conclure. Soit $p \gg 1$. Soit $u \in L^2(X, L^p \otimes E)$. D'après (1.69), il existe $u_0 \in P_p^{[0]}(\text{Ker } D_p^+)$, $u_1 \in (\text{Ker } D_p^+)^\perp$, tels que $u = u_0 + u_1$. Supposons $u \in \text{Im}(E_p([C_L, 2p\mu_0 - C_L]))$. Alors $0 = E_{p, C_L}(u) = E_{p, C_L}(u_0) = 0$, donc par injectivité $u_0 = 0$. De même $0 = E_{p, C_L}^\perp(u) = E_{p, C_L}^\perp(u_1)$, donc par injectivité $u_1 = 0$. Ainsi $u = 0$. En remarquant de plus que, d'après (1.51), l'opérateur essentiellement autoadjoint $\Delta_p + C_L$ est positif, ce qui achève la preuve du Théorème 1.8. $\square$

1.1.3 Le noyau de Bergman généralisé et son asymptotique. Dans cette section, on définit le noyau de Bergman généralisé et on énonce les résultats initialement obtenus par

CHAPITRE 1

Dai–Liu–Ma [20] dans le cas du noyau de Bergman pour l’opérateur de Dirac-spin^c sur une variété symplectique compacte, puis par Ma–Marinescu [35], [38], Lu–Ma–Marinescu [32] et Kordyukov–Ma–Marinescu [28] sur l’asymptotique du noyau de Bergman généralisé sur une variété symplectique complète à géométrie bornée. Deux comportements importants sont mis en évidence : d’une part, le noyau de Bergman généralisé décroît exponentiellement en dehors de la diagonale, et d’autre part il admet un développement asymptotique complet en les puissances de p au voisinage de la diagonale, dont les coefficients s’expriment en fonction des termes de courbure de la variété X et des fibrés L et E . La preuve de ces résultats dans les travaux cités précédemment repose sur trois points clés : le trou spectral pour le laplacien de Bochner renormalisé, la vitesse de propagation finie pour le noyau de la chaleur de l’oscillateur harmonique et les techniques de localisation analytique introduites par Bismut–Lebeau [11].

Définition du noyau de Bergman généralisé. Soit (X, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Soient (L, h^L, ∇^L) un fibré en droites hermitien préquantique sur X et (E, h^E, ∇^E) un fibré vectoriel hermitien sur X . On munit (X, ω) d’une métrique riemannienne complète g^{TX} . Soit $J : TX \rightarrow TX$ une structure presque complexe sur X compatible avec ω et g^{TX} . Soit $J_0 : TX \rightarrow TX$ l’endomorphisme défini par (1.28). Alors $J = J_0(-J_0^2)^{-1/2}$. On suppose que (X, L, E) est à géométrie bornée. On suppose également (1.36). D’après le Théorème 1.8 ([28, Théorème 1.1], [33, Corollaire 1.2]) en section précédente, le laplacien de Bochner renormalisé admet un trou spectral : il existe $C_L > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le spectre de Δ_p vérifie

$$\text{Spec}(\Delta_p) \subset [-C_L, C_L] \cup [2p\mu_0 - C_L, +\infty[. \quad (1.76)$$

Pour p suffisamment grand, comme dans [28], [34, Chapter 8], [35], on note

$$\mathcal{H}_p([-C_L, C_L]) := \text{Im}(E_p([-C_L, C_L])), \quad (1.77)$$

le sous-espace fermé de $L^2(X, L^p \otimes E)$ donné par l’espace spectral correspondant à l’intervalle $[-C_L, C_L]$, où on rappelle que E_p est le projecteur spectral introduit en (1.70).

Définition 1.14. Pour $p \gg 1$, on définit

$$P_p := E_p([-C_L, C_L]) : L^2(X, L^p \otimes E) \rightarrow \mathcal{H}_p([-C_L, C_L]). \quad (1.78)$$

le projecteur spectral sur l’espace spectral associé à $[-C_L, C_L]$. On appelle P_p le projecteur de Bergman généralisé associé à Δ_p au sens de [35]. D’après le théorème du noyau de Schwartz, P_p admet un noyau $P_p(\cdot, \cdot)$ par rapport à la forme volume riemannienne dv_X de (X, g^{TX}) . D’après [34, Remarque 1.4.3, Problème 1.5], le caractère elliptique de Δ_p

implique que $P_p(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(X \times X, (L^p \otimes E) \boxtimes (L^p \otimes E)^*)$. En suivant la terminologie de [35], on l'appelle le noyau de Bergman généralisé.

On note $d(x, x')$ la distance géodésique entre deux points $x, x' \in X$. Il a été montré par Ma–Marinescu [38, Théorème 1] et Kordyukov–Ma–Marinescu [28, Théorème 1.2] que le noyau de Bergman décroît exponentiellement en p en dehors de la diagonale :

Théorème 1.15 ([28, Théorème 1.2], [38, Théorème 1]). *Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $l > 0$, il existe $C_l > 0$ tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $x, x' \in X$,*

$$|P_p(x, x')|_{\mathcal{C}^l(X \times X)} \leq C_l p^{n+\frac{l}{2}} e^{-c\sqrt{p}d(x, x')}. \quad (1.79)$$

Dans l'inégalité ci-dessus, la norme $\mathcal{C}^l(X \times X)$ désigne la semi-norme ponctuelle (point-wise) $\mathcal{C}^l$ de la section P_p au point $(x, x') \in X \times X$, qui est la somme des normes induites par h^L , h^E et g^{TX} des dérivées jusqu'à l'ordre l de P_p pour les connexions $\nabla^{L^p \otimes E}$ et ∇^{TX} , évaluées en (x, x') .

Développement asymptotique près de la diagonale. Le noyau de Bergman généralisé P_p admet un développement asymptotique complet en puissances de p , établi par Ma–Marinescu [34, Chapter 8]. En particulier, d'après [34, Problème 6.1], comme dans [38, Théorème 6], il existe des coefficients lisses $b_r \in \mathcal{C}^\infty(X, \text{End}(E))$ et une constante $c_0 > 0$ tels que, pour tous $k, l \in \mathbb{N}$, il existe $C_{k,l} > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| P_p(x, x) - \sum_{r=0}^k b_r(x) p^{n-r} \right|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C_{k,l} p^{n-k-1}. \quad (1.80)$$

L'objet de cette section est d'énoncer une version précisée de ce développement asymptotique telle que figurant dans [28, Théorème 4.3] (voir Théorème 1.20), appelée *développement au voisinage de la diagonale* pour le noyau de Bergman généralisé. Nous exposerons de manière succincte les arguments principaux utilisés dans la preuve de ce développement. Le principe est, par une localisation adéquate du noyau $P_p(x, x')$ dans une boule géodésique autour d'un point $x_0 \in X$, en trivialisant localement les fibrés L^p et E autour de x_0 par transport parallèle pour les connexions ∇^L et ∇^E , d'identifier localement $P_p(x, x') \in \mathcal{C}^\infty(X \times X, (L^p \otimes E) \boxtimes (L^p \otimes E)^*)$ à un élément $P_{p,x_0}(Z, Z') \in \mathcal{C}^\infty(T_{x_0}X \times T_{x_0}X, E_{x_0} \otimes E_{x_0}^*)$, qui ne dépend plus du fibré en droite L^p , mais seulement du paramètre p . De cette manière, on se ramène à l'étude d'un opérateur agissant sur des fonctions lisses de $\mathbb{R}^{2n}$, à valeurs dans $\text{End}(E)_{x_0}$.

Remarque 1.16. *Le développement au voisinage de la diagonale de P_p a d'abord été obtenu par Lu–Ma–Marinescu [32] et Ma–Marinescu dans [35, Théorème 1.19] dans le cas où (X, g^{TX}) est une variété compacte, pour $Z, Z' \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon/\sqrt{p})$, et avec un reste en*

CHAPITRE 1

$\mathcal{O}(p^{-\infty})$. Le développement que nous allons énoncer est un résultat de Kordyukov–Ma–Marinescu [28, Théorème 4.3] et est valable dans le cas où (X, L, E) est à géométrie bornée, pour $Z, Z' \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$, et avec un reste en $\mathcal{O}(e^{-c_0\sqrt{p}})$.

Remarque 1.17. Dans le cas où (X, J, ω, g^{TX}) est une variété kählérienne compacte, $E = \mathbb{C}$ et (L, h^L) est un fibré holomorphe hermitien préquantique, en reprenant la Remarque 1.7, $\mathcal{H}_p([-C_L, C_L])$ correspond à $\text{Ker } \square_p = H^0(X, L^p)$ l'espace des sections holomorphes de L^p . Dans ce cas, le noyau $P_p(\cdot, \cdot)$ est appelé le noyau de Bergman, et l'asymptotique sur la diagonale (2.8) est un résultat qui découle notamment des travaux de Tian [47], Bouche [13], Catlin [17] et Zelditch [48], Dai–Liu–Ma [20], Ma–Marinescu [35].

Localisation À l'aide d'un argument fondé sur la vitesse de propagation finie pour l'équation des ondes [34, Appendice D.2], on montre que l'asymptotique du noyau $P_p(x, x')$ ne dépend que de la restriction de Δ_p sur un voisinage $(x, x') \in B^X(x_0, \varepsilon)^2$ pour $x_0 \in X$. Nous n'exposons pas cet argument et référons le lecteur à [34, §1.6.2] et [35, §1.1] pour plus de détails.

Pour $x_0 \in X$ et $0 < \varepsilon < \text{inj}^X$, on désignera par $\exp_{x_0}^X : B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon) \rightarrow X$ l'application exponentielle de la variété (X, g^{TX}) au point x_0 . On rappelle la définition du transport parallèle pour une connexion ∇^F sur un fibré euclidien ou hermitien (F, h^F, ∇^F) .

Définition 1.18 ([9, p.26]). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé contenant 0 et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe lisse dans M . L'application $\tau_\gamma(t) : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(t)}$ de transport parallèle le long de γ est définie comme l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire avec condition initiale

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}(t)}^F \tau_\gamma(t) = 0 \\ \tau_\gamma(0) = \text{Id}. \end{cases} \quad (1.81)$$

Les transports parallèles le long des courbes $\gamma(t) = \exp_{x_0}^X(tZ)$, $t \in [0, 1]$, pour $Z \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, donnent une trivialisatation du fibré F sur $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$ en identifiant $F_{\exp_{x_0}^X(Z)}$ à F_{x_0} .

Soit $x_0 \in X$, $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ le repère orthonormé de $T_{x_0}X$ pour g^{TX} défini en (1.15). Soit $0 < \varepsilon < \text{inj}^X$. Pour $x \in B^X(x_0, \varepsilon)$, $x = \exp_{x_0}(Z)$, $Z \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$, on note $\{e_i(Z)\}_{i=1}^{2n}$ le repère de T_xX obtenu par transport parallèle de e_i selon $[0, 1] \ni t \mapsto tZ$ pour ∇^{TX} . De manière similaire, quitte à prendre ε plus petit, en se donnant un repère orthonormé de E_{x_0} pour la métrique h^E , on identifie E_Z à E_{x_0} par transport parallèle pour ∇^E selon $[0, 1] \ni t \mapsto tZ$. On procède de même avec L . On peut ainsi voir le noyau de Bergman $P_p(x, x')$ pour $x, x' \in B^X(x_0, \varepsilon)$ comme un élément

$$P_{p, x_0}(Z, Z') \in \mathcal{C}^\infty(T_{x_0}X \times T_{x_0}X, \text{End}(E)_{x_0}), \quad Z, Z' \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon). \quad (1.82)$$

On identifie $T_{x_0}X \simeq \mathbb{R}^{2n}$ à l'aide du repère $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$. À l'aide de l'identification par transport parallèle faite plus haut, les données géométriques $g^{TX}, \nabla^{TX}, R^{TX}, h^L, \nabla^L, R^L, h^E, \nabla^E, R^E$ et J sur $B^X(x_0, \varepsilon)$ sont identifiées à des données géométriques sur $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$, dépendant de $Z \in T_{x_0}X, |Z| < \varepsilon$, et étendues ensuite à $T_{x_0}X$ à l'aide d'une fonction « bosse » (bump function) à support compact (voir [35, §1.2]). En suivant [28, §4], [35, §1.2], on considère alors le laplacien de Bochner renormalisé $\Delta_{p,x_0} = \Delta_{L_{x_0}^p \otimes E_{x_0}} - p\tau_{x_0}$ pour ces données, agissant sur $\mathcal{C}_0^\infty(T_{x_0}X, L_{x_0}^p \otimes E_{x_0})$. D'après [35, (1.23)], [28, (4.4)], par des arguments similaires à ceux de la preuve du Théorème 1.8, l'opérateur Δ_{p,x_0} admet, de même que Δ_p , un trou spectral :

$$\text{Spec}(\Delta_{p,x_0}) \subset [-C_L, C_L] \cup \left[\frac{8}{5}p\mu_0 - C_L, +\infty \right]. \quad (1.83)$$

Quitte à choisir un vecteur unitaire de $L_{x_0}^p$, on se ramène au cas où Δ_{p,x_0} agit sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, E_{x_0})$. Soit P_{p,x_0}^0 le projecteur spectral sur $\mathcal{H}_p([-C_{x_0}, C_{x_0}])$. De même que dans le cas du noyau de Bergman généralisé P_p , le projecteur P_{p,x_0}^0 admet un noyau lisse $P_{p,x_0}^0(Z, Z') \in \mathcal{C}^\infty(T_{x_0}X \times T_{x_0}X, \text{End}(E)_{x_0})$. À l'aide de la propriété de trou spectral, pour $p \gg 1$, on peut considérer δ un cercle dans $\mathbb{C}$ orienté dans le sens trigonométrique, entourant l'intervalle $[-C_L, C_L]$, et n'intersectant pas $[2p\mu_0 - C_L, +\infty[$. On vérifie alors la formule [28, (3.1)],

$$P_p = \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \lambda^{m-1} \left(\lambda - \frac{1}{p} \Delta_p \right)^{-m} d\lambda, \quad m \geq 1. \quad (1.84)$$

D'après (1.83), quitte à ajuster le contour δ , on a la même formule pour P_{p,x_0}^0 et Δ_{p,x_0} . À l'aide d'estimées sur les résolvantes $\left(\lambda - \frac{1}{p} \Delta_p \right)^{-1}$, $\left(\lambda - \frac{1}{p} \Delta_{p,x_0} \right)^{-1}$ obtenues dans [28, Théorèmes 3.4, 4.2], Kordyukov–Ma–Marinescu prouvent que, à des termes exponentiellement décroissants en p près, l'asymptotique de $P_{p,x_0}(Z, Z')$ au voisinage de $(0, 0)$ est identique à celle de $P_{p,x_0}^0(Z, Z')$ [35, Proposition 1.3]. Après une transformation de remise à l'échelle (rescaling) $Z \rightarrow Z/t$, $t = \frac{1}{\sqrt{p}}$, l'opérateur Δ_{p,x_0} devient un opérateur $\mathcal{L}_t$, qui admet (voir [35, Théorème 1.4]) un développement de la forme

$$\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_0 + \sum_{r=1}^m t^r \mathcal{O}_r + \mathcal{O}(t^{m+1}), \quad (1.85)$$

avec

$$\mathcal{L}_0 = - \sum_j \left(\nabla_{e_j} + \frac{1}{2} R_{x_0}^L(Z, e_j) \right)^2 - \tau_{x_0}, \quad (1.86)$$

et les opérateurs $\mathcal{O}_r$ sont des opérateurs différentiels d'ordre 2, qui ont pour coefficients des polynômes en Z, Z' dont les coefficients ne dépendent que des données géométriques locales en x_0 .

CHAPITRE 1

Cas modèle, espace de Bargmann D'après [35, (1.87)], dans les coordonnées $z_i, \bar{z}_i$ données par les repères $\{w_i\}_{i=1}^n, \{\bar{w}_i\}_{i=1}^n$ introduites en (1.15), on a,

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=1}^n b_i b_i^+, \quad b_i := -2 \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{1}{2} a_i \bar{z}_i, \quad b_i^+ := 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2} a_i z_i, \quad (1.87)$$

où la famille $\{a_i\}_{i=1}^n$ est telle qu'en (1.38), et respectivement les opérateurs b_i^+, b_i sont appelés les opérateurs *création* et *annihilation*. Même si nous travaillons dans le cadre complexe, on note la ressemblance entre la définition de l'opérateur $\mathcal{L}_0 : L^2(\mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{C}^n)$ et celle de l'oscillateur harmonique sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.19 ([35, Théorème 1.15]). *Le spectre de $\mathcal{L}_0 : L^2(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n})$ est donné par*

$$\text{Spec} \left(\mathcal{L}_0|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \right) = \left\{ 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \right\}, \quad (1.88)$$

et une base orthogonale du sous-espace propre associé à $2 \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ est donnée par

$$b_1^{\alpha_1} \dots b_n^{\alpha_n} \left(z^\beta \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n a_i |z_i|^2 \right) \right), \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{N}^n. \quad (1.89)$$

On définit

$$\mathcal{J}_{x_0} := -2\pi \sqrt{-1} J_0(x_0). \quad (1.90)$$

alors $\mathcal{J}_{x_0} : T_{x_0}^{(1,0)} X \rightarrow T_{x_0}^{(1,0)} X$ est positif et $\mathcal{J}_{x_0} : T_{x_0} X \otimes \mathbb{C} \rightarrow T_{x_0} X \otimes \mathbb{C}$ est antiautoadoint. À l'aide de la base de vecteurs propres obtenue dans le théorème ci-dessus, on obtient que la projection orthogonale $\mathcal{P}_{x_0} : L^2(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \text{Ker } \mathcal{L}_0$ est un opérateur à noyau Schwartz lisse $\mathcal{P}_{x_0}(Z, Z')$ dont l'expression est

$$\mathcal{P}_{x_0}(Z, Z') = \frac{\det_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{x_0}}{(2\pi)^n} \exp \left(-\frac{1}{4} \langle (\mathcal{J}_{x_0}^2)^{1/2} (Z - Z'), (Z - Z') \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_{x_0} Z, Z' \rangle \right). \quad (1.91)$$

Développement asymptotique de P_p près de la diagonale On énonce à présent le théorème de développement asymptotique sur un voisinage de la diagonale du noyau de Bergman tel que formulé dans [28, Théorème 4.3].

Théorème 1.20 ([28, Théorème 4.3]). *Il existe $\varepsilon \in]0, \text{inj}^X[$ tel que pour tous $j, l, l' \in \mathbb{N}$, il existe $C, c_0, M > 0$ tel que pour tous $p \geq 1, x_0 \in X$ et $Z, Z' \in T_{x_0} X, |Z|, |Z'| < \varepsilon$ on a*

$$\begin{aligned} & \sup_{|\alpha|+|\alpha'| \leq l} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} \left(p^{-n} P_{p,x_0}(Z, Z') - \sum_{r=0}^j \mathcal{F}_{r,x_0}(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z') \kappa_{x_0}^{-1/2}(Z) \kappa_{x_0}^{-1/2}(Z') p^{-r/2} \right) \right|_{\mathcal{C}^{l'}(X)} \\ & \leq C p^{-\frac{j-l+1}{2}} (1 + \sqrt{p}|Z| + \sqrt{p}|Z'|)^M \exp(-\sqrt{\mu_0 p}|Z - Z'|) + \mathcal{O}(e^{-c_0 \sqrt{p}}), \end{aligned} \quad (1.92)$$

où $|\cdot|_{\mathcal{C}^r(X)}$ désigne la norme $\mathcal{C}^r$ pour le paramètre $x_0 \in X$, et

$$\mathcal{F}_{r,x_0}(Z, Z') := J_{r,x_0}(Z, Z')\mathcal{P}_{x_0}(Z, Z'), \quad J_{0,x_0}(Z, Z') = \text{Id}_{E_{x_0}}. \quad (1.93)$$

Les termes $J_{r,x_0}(Z, Z')$ sont des polynômes en Z, Z' à valeurs dans $\text{End}(E)_{x_0}$, de même parité que r , et vérifient $\deg J_{r,x_0}(Z, Z') \leq 3r$. Leurs coefficients sont des polynômes en R^{TX}, R^E, R^L et en leurs dérivées d'ordre $\leq r-2$ en x_0 , et en des combinaisons linéaires des valeurs propres de $\mathcal{J}_{x_0}$ et de leurs inverses.

1.1.4 Opérateurs de Toeplitz. L'objet de cette section est d'exposer succinctement la théorie générale pour les opérateurs de Toeplitz telle qu'élaborée par Ma–Marinescu ([34, Chapitres 7, 8], [36], [37]) en travaillant avec le noyau de Bergman généralisé. Cette situation est plus spécifiquement traitée dans [36, Section 5].

Comme précédemment, nous supposons que (X, g^{TX}) est complète, et (X, L, E) est à géométrie bornée : on rappelle que cela veut dire que le rayon d'injectivité inj^X de (X, g^{TX}) est strictement positif et que les dérivées à tout ordre de R^L, R^E, J, g^{TX} sont uniformément bornées sur X . On conserve également l'hypothèse (1.36).

Définition. Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \text{End}(E))$. On définit l'opérateur de Toeplitz de symbole f comme la famille d'opérateurs agissant sur $L^2(X, L^p \otimes E)$ définie par

$$T_{f,p} : L^2(X, L^p \otimes E) \rightarrow L^2(X, L^p \otimes E), \quad T_{f,p} := P_p M_f P_p, \quad (1.94)$$

où M_f correspond à la multiplication par la fonction f .

Remarques 1.21. Notons les points suivants :

- (i) En suivant [36, Section 5], on peut étendre l'espace des symboles à $\mathcal{C}_{\text{const}}^\infty(X, \text{End}(E))$ les sections lisses de $\text{End}(E)$ constantes en dehors d'un compact. Par exemple, pour $c \in \mathbb{R}$ tel que $f - c \text{Id} \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \text{End}(E))$, on définit $T_{f,p} := T_{(f-c\text{Id}),p} + cP_p$. Dans le cas de la fonction constante égale à 1, $T_{1,p}$ correspond alors au projecteur de Bergman P_p .
- (ii) Pour parler de quantification de Berezin-Toeplitz de f , il est d'usage de restreindre les opérateurs au sous-espace spectral $\mathcal{H}_p([-C_L, C_L])$ défini en (1.77), plus précisément, $T_{f,p} : \mathcal{H}_p([-C_L, C_L]) \rightarrow \mathcal{H}_p([-C_L, C_L])$. En particulier, en suivant le point (i) précédent, $T_{1,p} = \text{Id}_{\mathcal{H}_p([-C_L, C_L])}$. Dans cette section, afin de suivre [34], [36], [37], les opérateurs $T_{f,p}$ seront définis sur $L^2(X, L^p \otimes E)$.
- (iii) Si $f \in L^\infty(X)$, on définit également l'opérateur de Toeplitz de symbole f par (1.94). Nous nous pencherons sur ce cas dans le Chapitre 2. Plus précisément, le Chapitre

CHAPITRE 1

2 traite du cas où f est la fonction indicatrice d'un domaine compact à bord lisse de la variété X .

Dans le cas où $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \text{End}(E))$, en suivant [36, (4.7), p.580], le noyau de Schwartz de l'opérateur $T_{f,p}$ est donné par la formule

$$T_{f,p}(x, x') = \int_X P_p(x, x'') f(x'') P_p(x'', x') dv_X(x'). \quad (1.95)$$

Asymptotique du noyau. À l'aide de l'asymptotique du noyau de Bergman énoncée en Théorème 1.20, de sa décroissance exponentielle en dehors de la diagonale énoncée en Théorème 1.15, et du développement de Taylor du symbole f au voisinage de x_0 , on obtient, d'après [36, Lemme 4.6 et Section 5], le développement suivant.

Théorème 1.22 ([36, Lemme 4.6]). *Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \text{End}(E))$. Il existe $\{Q_{r,x_0}(f)\}_{r \in \mathbb{N}, x_0 \in X}$ une famille telle que*

- (i) $Q_{r,x_0}(f) \in \text{End}(E)_{x_0}[Z, Z']$ sont des polynômes de même parité que r
- (ii) $\{Q_{r,x_0}(f)\}_{r \in \mathbb{N}, x_0 \in X}$ est lisse par rapport à $x_0 \in X$,
- (iii) Il existe $0 < \varepsilon < \text{inj}^X$ et $C_0 > 0$ tel que pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe $C_{k,l} > 0$, $M > 0$ tel que pour tout $x_0 \in X$, $Z, Z' \in T_{x_0}X$, $|Z|, |Z'| < \varepsilon$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| p^{-n} T_{f,p,x_0}(Z, Z') - \sum_{r=0}^k (Q_{r,x_0}(f) \mathcal{P}_{x_0})(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z') p^{-r/2} \right|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C_{k,l} p^{-\frac{k+1}{2}} (1 + \sqrt{p}|Z| + \sqrt{p}|Z'|)^M \exp(-C_0 \sqrt{p}|Z - Z'|) + \mathcal{O}(p^{-\infty}) \quad (1.96)$$

avec en particulier $Q_{0,x_0}(f) = f(x_0)I_{\mathbb{C} \otimes E}$.

Remarque 1.23. Pour le point (iii), en suivant [36, Notation 4.4], on utilise aussi la notation

$$p^{-n} T_{f,p,x_0}(Z, Z') \cong \sum_{r=0}^{\infty} (Q_{r,x_0}(f) \mathcal{P}_{x_0})(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z') p^{-r/2} + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (1.97)$$

Asymptotique de la composée. Pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(X)$, on notera $\{f, g\}$ le crochet de Poisson de f et g , défini par $\{f, g\} := \xi_f(dg)$, où ξ_f désigne le champ de vecteur Hamiltonien engendré par f , c'est-à-dire tel que $2\pi \iota_{\xi_f} \omega = df$.

En conclusion de ce chapitre, nous énonçons les résultats de Ma–Marinescu sur le comportement asymptotique de la composée d'opérateurs de Toeplitz :

Théorème 1.24 ([36, Théorèmes 1.1, 5.3]). *On vérifie les points suivants :*

- (i) Soient $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \text{End}(E))$. La composée $T_{f,p} \circ T_{g,p}$ est un opérateur de Toeplitz, qui admet un développement asymptotique de la forme

$$T_{f,p}T_{g,p} \simeq \sum_{r=0}^{\infty} p^{-r} T_{C_r(f,g),p} + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (1.98)$$

avec C_r des opérateurs bidifférentiels, $C_r(f, g) \in \mathcal{C}^\infty(X, \text{End}(E))$ tels qu'on vérifie $\text{supp}(C_r(f, g)) \subset \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g)$, et $C_0(f, g) = fg$. De plus, si $f, g \in \mathcal{C}_0^\infty(X)$, on vérifie

$$C_1(f, g) - C_1(g, f) = \sqrt{-1}\{f, g\}, \quad (1.99)$$

- (ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \text{End}(E))$, on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|T_{f,p}\| = \sup_{\substack{u \in E_x \setminus \{0\} \\ x \in X}} \frac{|f(u)|_{h^E}}{|u|_{h^E}}. \quad (1.100)$$

En particulier, si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(X, \mathbb{R})$, $\lim_{p \rightarrow \infty} \|T_{f,p}\| = \|f\|_\infty$.

- (iii) D'après le point (i) des Remarques 1.21, si $f, g \in \mathcal{C}_{\text{const}}^\infty(X, \mathbb{R})$, une conséquence du développement (1.98) et de (1.99) est le principe de correspondance :

$$[T_{f,p}, T_{g,p}] = \frac{\sqrt{-1}}{p} T_{\{f,g\},p} + \mathcal{O}(p^{-2}). \quad (1.101)$$

Remarque 1.25. En se ramenant au cas modèle sur $\mathbb{C}^n$, Ma–Marinescu développent un calcul des noyaux (voir [34, Chapitre 7, §7.1]) et donnent un algorithme qui permet de retrouver l'expression locale précise des quantités $C_r(f, g)$. Dans le cas où les symboles sont des fonctions indicatrices, comme dans le Chapitre 2 de cette thèse, nous n'avons pas pu établir un calcul fonctionnel dans le cas modèle (voir la Remarque 2.10).

1.2 Noyau de Bergman sur une surface de Riemann épointée

En dehors de la quantification de Berezin–Toeplitz, le développement asymptotique du noyau de Bergman trouve une application importante dans le problème de l'existence de métriques kählériennes à courbure scalaire constante, en lien avec la conjecture de Yau–Tian–Donaldson. L'existence de telles métriques peut être étudiée à travers des notions dites de stabilité, notamment la stabilité de Chow et la K-stabilité [45, Chapitre 6].

Plus spécifiquement, soit X une variété kählérienne compacte, et (L, h^L) un fibré en droites holomorphe positif sur X . Le noyau de Bergman est alors donné par la Remarque 1.17. Dans ce cadre, Tian [47] donne une application importante de l'asymptotique du

CHAPITRE 1

noyau de Bergman à la convergence quand $p \rightarrow +\infty$ des métriques de Fubini-Study ω_p définies à partir des applications de plongement de Kodaira de X dans l'espace projectif des sections de L^p [34, Théorème 5.1.4]. Dans [21], Donaldson prouve, en utilisant l'asymptotique du noyau de Bergman, que si (X, L) est stable au sens de Chow (ou « équilibrée »), et si les métriques kählériennes ω_p convergent vers une métrique ω_∞ , alors ω_∞ est une métrique kählérienne à courbure scalaire constante.

Dans sa thèse, Székelyhidi [46, §3.1.2] s'intéresse à une notion de K -stabilité pour l'existence d'une métrique dite extrémale [45, Chapitre 4] sur $X \setminus D$, où D est un diviseur d'une variété kählérienne compacte X . Cette situation peut-être illustrée par le cas plus simple d'une surface de Riemann dite épointée. Une question naturelle est de considérer l'étude du noyau de Bergman dans ce contexte.

Dans [5], [6], [7], Auvey–Ma–Marinescu établissent des résultats sur l'asymptotique du noyau de Bergman au voisinage des points de ponction d'une surface de Riemann épointée, que nous énonçons succinctement dans ce chapitre.

1.2.1 Définitions.

Cadre. On expose le cadre et les hypothèses de [5], [7]. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité. On munit le disque de Poincaré épointé $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, de la *métrique de Poincaré* $\omega_{\mathbb{D}^*}$ définie par la forme kählérienne

$$\omega_{\mathbb{D}^*} := \frac{\sqrt{-1}dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)}. \quad (1.102)$$

Soit $\bar{\Sigma}$ une surface de Riemann compacte. Soit $D = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \bar{\Sigma}$ un ensemble fini de points. On considère la *surface de Riemann épointée* $\Sigma := \bar{\Sigma} \setminus D$, que l'on munit d'une forme kählérienne ω_Σ . Soit L un fibré en droites holomorphe sur $\bar{\Sigma}$, et h^L une métrique hermitienne singulière sur L telle que :

- (A) h^L est lisse sur Σ , et pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, il existe une trivialisation de L sur un voisinage $\bar{V}_j$ de a_j dans $\bar{\Sigma}$ dont les coordonnées associées z_j sont telles que $|1|_h(z_j) = |\log(|z_j|^2)|$.
- (B) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la courbure (lisse) R^L de (L, h^L) vérifie $\sqrt{-1}R^L \geq \varepsilon\omega_\Sigma$ sur Σ et $\sqrt{-1}R^L = \omega_\Sigma$ sur $V_j := \bar{V}_j \setminus \{a_j\}$. En particulier, sur V_j , $\omega_\Sigma = \omega_{\mathbb{D}^*}$ et (Σ, ω_Σ) est une variété complète.

On rappelle la notation $L^p := L^{\otimes p}$. Pour $p \geq 1$ on note h^{L^p} la métrique sur $L^p|_\Sigma$ provenant de h^L . On note $L^2(\Sigma, L^p)$ l'espace des sections L^2 de L^p sur Σ , dont on rappelle qu'il est le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma, L^p)$ pour la norme définie par

$$\|s\|_{L^2} := \int_\Sigma |s|_{h^{L^p}}^2 \omega_\Sigma. \quad (1.103)$$

On considère $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ l'espace des sections holomorphes L^2 de L^p pour les métriques h^{L^p} et ω_Σ , i.e.,

$$H_{(2)}^0(\Sigma, L^p) = \left\{ s \in H^0(\Sigma, L^p) : \|s\|_{L^2} < +\infty \right\}. \quad (1.104)$$

D'après [6, (1.3) et Remarque 3.2], et [34, Lemme 6.2.1 et (6.2.17)], à partir d'un argument fondé sur un lemme dû à Skoda [34, Lemme 2.3.22], les sections de $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ s'étendent en sections holomorphes de L^p sur $\bar{\Sigma}$, et on a l'égalité

$$H_{(2)}^0(\Sigma, L^p) = \left\{ s \in H^0(\bar{\Sigma}, L^p) : s|_D = 0 \right\}. \quad (1.105)$$

Par compacité de $\bar{\Sigma}$, $\dim H^0(\bar{\Sigma}, L^p) < +\infty$. On note $d_p := \dim H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$.

Noyau de Bergman. La définition du noyau de Bergman fait écho à celle donnée dans la Section 1. On note $B_p : L^2(\Sigma, L^p) \rightarrow H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ la projection orthogonale sur $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$. Soit $B_p(\cdot, \cdot)$ son noyau de Schwartz, appelé noyau de Bergman. Soit $\{S_l^p\}_{l=1}^{d_p}$ une base orthonormée de $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$. On vérifie

$$\forall x, y \in \Sigma, \quad B_p(x, y) = \sum_{j=1}^{d_p} S_j^p(x) \otimes S_j^p(y)^*. \quad (1.106)$$

On notera $B_p(x) := B_p(x, x)$, on appelle $B_p(\cdot)$ la *fonction du noyau de Bergman*. Dans leur travail, Auvray–Ma–Marinescu [6, Théorème 1.1] montrent que le comportement du noyau de Bergman autour d'un point de ponction $a \in D$ est proche de celui du noyau de Bergman sur le disque unité épointé $\mathbb{D}^*$. Avant d'énoncer leur résultat, nous commençons par décrire ce modèle local.

Modèle local : le noyau de Bergman sur le disque épointé $\mathbb{D}^*$. Soit h_0 la métrique plate sur $\mathbb{C}$. En suivant [6, Section 3.1], on définit, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{(2)}^p(\mathbb{D}^*) := H_{(2)}^0(\mathbb{D}^*, \omega_{\mathbb{D}^*}, \mathbb{C}, |\log(|z|^2)|^p h_0), \quad (1.107)$$

l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}^*$ de carré intégrable pour la métrique hermitienne $|\log(|z|^2)|^p h_0$ sur $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}^*$. D'après [6, Lemme 3.1], une base orthonormée de sections de $H_{(2)}^p(\mathbb{D}^*)$ pour $p \geq 2$ est donnée par

$$\left\{ \left(\frac{l^{p-1}}{2\pi(p-2)!} \right)^{1/2} z^l : l \in \mathbb{N}, l \geq 1 \right\}, \quad (1.108)$$

CHAPITRE 1

on montre alors que le noyau de Bergman $B_p^{\mathbb{D}^*}(\cdot, \cdot)$ pour le disque unité est donné par l'expression [6, (3.6)],

$$B_p^{\mathbb{D}^*}(x, y) = \frac{|\log(|y|^2)|^2}{2\pi(p-2)!} \sum_{l=1}^{+\infty} l^{p-1} x^l \bar{y}^l. \quad (1.109)$$

D'où l'expression de la fonction noyau de Bergman du disque unité épointé

$$B_p^{\mathbb{D}^*}(z) = \frac{|\log(|z|^2)|^p}{2\pi(p-2)!} \sum_{l=1}^{+\infty} l^{p-1} |z|^{2l}. \quad (1.110)$$

1.2.2 Comportement du noyau de Bergman près des ponctions. Comme dans [6, (1.5)], on introduit la norme $\mathcal{C}^k$ pour la métrique h^{L^p} sur L^p définie sur l'espace des sections lisses $\mathcal{C}^\infty(\Sigma, L^p)$ par

$$|\sigma|_{\mathcal{C}^k(h^{L^p})}(x) = \left(|\sigma|_{h^{L^p}} + \left| \nabla^{p, \Sigma} \sigma \right|_{h^{L^p}, \omega_\Sigma} + \dots + \left| (\nabla^{p, \Sigma})^k \sigma \right|_{h^{L^p}, \omega_\Sigma} \right)(x). \quad (1.111)$$

Nous énonçons maintenant les résultats sur le comportement asymptotique du noyau de Bergman B_p obtenus par Auvray–Ma–Marinescu [6], [7]. Si $a \in D$ est un point de ponction, et $\mathbb{D}_r^* := \mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\} \subset \Sigma$ le disque épointé centré en a , alors on a l'identification des données géométriques $(\Sigma, \omega_\Sigma, L, h^L)|_{\mathbb{D}_r^*} = (\mathbb{D}^*, \omega_{\mathbb{D}^*}, \mathbb{C}, h_{\mathbb{D}^*})|_{\mathbb{D}_r^*}$ dans la trivialisatation donnée par l'hypothèse (A). Auvray–Ma–Marinescu [6, Théorème 1.1] établissent le résultat suivant.

Théorème 1.26 ([6, Théorème 1.1]). *On suppose que $(\Sigma, \omega_\Sigma, L, h)$ satisfait les conditions (A) et (B). Soit $a \in D$, soit $0 < r < e^{-1}$ le rayon du disque épointé centré en a . Alors pour $k \in \mathbb{N}$, $l > 0$, $\alpha \geq 0$, il existe une constante $C_{k,l,\alpha}$ telle que pour $p \gg 1$, on a sur $\mathbb{D}_{r/2}^* \times \mathbb{D}_{r/2}^*$*

$$\left| B_p^{\mathbb{D}^*}(x, y) - B_p(x, y) \right|_{\mathcal{C}^k(h^{L \otimes p})} \leq C_{k,l,\alpha} p^{-l} \left| \log(|x^2|) \right|^{-\alpha} \left| \log(|y|^2) \right|^{-\alpha}. \quad (1.112)$$

Dans [7], Auvray–Ma–Marinescu prouvent également que le quotient du noyau de Bergman et de son modèle sur le disque unité tend vers 1 dans la limite $p \rightarrow +\infty$, au sens suivant

Théorème 1.27 ([7, Théorèmes 1.2, 1.3]). *On suppose que $(\Sigma, \omega_\Sigma, L, h)$ vérifie les conditions (A) et (B).*

(i) *Pour tout $l > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\sup_{z \in V_1 \cup \dots \cup V_N} \left| \frac{B_p}{B_p^{\mathbb{D}^*}}(z) - 1 \right| \leq Cp^{-l}, \quad (1.113)$$

ce que l'on notera

$$\sup_{z \in V_1 \cup \dots \cup V_N} \left| \frac{B_p}{B_p^{\mathbb{D}^*}}(z) - 1 \right| = \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (1.114)$$

(ii) Pour tout $k \geq 1$ et $D_1, \dots, D_k \in \left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$, on a

$$\sup_{z \in \bar{V}_1 \cup \dots \cup \bar{V}_N} \left| (D_1 \dots D_k) \frac{B_p}{B_p^{\mathbb{D}^*}}(z) \right| = \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (1.115)$$

Remarque 1.28. Dans [7, §4, Théorème 4.1], Auvray–Ma–Marinescu donnent une application de ces résultats à l'asymptotique quand $p \rightarrow \infty$ des formes de Fubini–Study induites par des applications de plongement de Kodaira pour Σ , au voisinage des points de ponction. Leurs résultats sont rappelés dans le Chapitre 3 de cette thèse (voir (3.6), (3.7)).

1.3 Présentation des travaux effectués

1.3.1 Opérateurs de Toeplitz avec symbole une fonction indicatrice. Nous présentons le Chapitre 2 de cette thèse. On se place dans le cadre de la Section 1. Soit (X, ω) une variété symplectique. Soit (L, h^L, ∇^L) un fibré en droites hermitien préquantique sur X et (E, h^E, ∇^E) un fibré vectoriel hermitien sur X . On munit (X, ω) d'une métrique riemannienne complète g^{TX} et d'une structure presque complexe J compatible avec ω et g^{TX} . Soit $P_p : L^2(X, L^p \otimes E) \rightarrow \mathcal{H}_p([-C_L, C_L])$ le noyau de Bergman généralisé, tel qu'introduit dans la Section 1.

On se donne $W \subset X$ un domaine compact à bord lisse de X . On considère l'opérateur de Toeplitz $T_{W,p}$ agissant sur $\mathcal{H}_p([-C_L, C_L])$ ayant pour symbole la fonction indicatrice de W ,

$$T_{W,p} := P_p M_{\mathbf{1}_W} P_p, \quad \text{avec} \quad \mathbf{1}_W(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in W, \\ 0 & \text{si } x \notin W. \end{cases} \quad (1.116)$$

Notre premier résultat concerne le comportement asymptotique du noyau de $T_{W,p}$, et est énoncé dans le Théorème 2.1. Nous montrons que, pour $x \in X \setminus W$ loin de ∂W , $T_{W,p}(x, x)$ décroît exponentiellement en la racine de p fois la distance géodésique de x au bord. Lorsque $x \in W$ est loin du bord de W , $T_{W,p}(x, x)$ se comporte asymptotiquement comme le noyau de Bergman, à des termes exponentiellement décroissants en la racine de p fois la distance géodésique au bord près. De plus, lorsque x se trouve dans un voisinage tubulaire $\mathcal{U}_\eta$ de taille $\eta > 0$ du bord, on obtient un développement asymptotique complet en les puissances de p pour $T_{W,p}(x, x)$, dont le premier terme présente un profil en la fonction

CHAPITRE 1

erreur complémentaire erfc définie par

$$\operatorname{erfc}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-t^2) dt. \quad (1.117)$$

Notre second résultat est énoncé dans le Théorème 2.4, et donne un développement asymptotique de la trace de polynômes en $T_{W,p}$. Une conséquence particulière de ce résultat est l'obtention du comportement asymptotique du spectre pour l'opérateur $T_{W,p}$, énoncée dans le Corollaire 2.5, et qui prend la forme d'une loi de Weyl,

$$\left| \operatorname{Spec}(T_{W,p}) \cap [a, b] \right| = p^{n-1/2} \frac{\operatorname{rk}(E)C(V)}{\sqrt{2\pi}} (\operatorname{erfc}^{-1}(a) - \operatorname{erfc}^{-1}(b)) + o(p^{n-1/2}), \quad (1.118)$$

avec $0 < a < b < 1$.

Le coeur de notre preuve réside en l'application des résultats sur le comportement asymptotique du noyau de Bergman généralisé obtenus par Ma–Marinescu [35], Lu–Ma–Marinescu [32], et Kordyukov–Ma–Marinescu [28], et plus spécifiquement de l'asymptotique localisée du noyau de Bergman généralisé. Le travail au voisinage du bord ∂W est fait à l'aide de coordonnées dites de Fermi, en s'inspirant de la méthode de [22].

Les résultats sur l'asymptotique de la trace et du spectre ont précédemment été obtenus par Charles–Estienne [18] avec une approche différente fondée sur des méthodes de phase stationnaire dégénérée, dans le cas où (X, ω) est kählérienne compacte et le fibré E trivial, avec une application à l'étude de l'entropie d'intrication pour un système de Fermions libres, ainsi qu'aux processus ponctuels de noyau de corrélation le noyau de Bergman [18, §8].

1.3.2 Formes de Fubini-Study sur une surface de Riemann épointée. Nous présentons le Chapitre 3 de cette thèse, issu d'un travail en commun avec Xiaonan Ma et Lei Wang [2]. On travaille dans le cadre de la Section 2. Soit $\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus D$ une surface de Riemann épointée, et $L|_{\Sigma}$ la restriction à Σ d'un fibré en droites holomorphe sur $\bar{\Sigma}$. En application des résultats de Auvray–Ma–Marinescu [6], [7] présentés dans la Section 2, on montre que le quotient des métriques de Fubini-Study induites par les applications de Kodaira pour L^p par la métrique de Poincaré $\omega_{\mathbb{D}^*}$ du disque unité épointé se comporte, en borne uniforme et au voisinage des ponctions, en $\mathcal{O}(p^3)$ quand $p \rightarrow \infty$, au sens de (1.115) et tel qu'énoncé dans le Théorème 3.2. En corollaire de ce résultat, on s'intéresse au cas où Σ est le quotient du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par un groupe Fuchsien géométriquement fini de première espèce sans éléments elliptiques. On montre que le quotient de la métrique de Bergman par la métrique Kähler–Einstein induite sur Σ par la métrique de Poincaré sur $\mathbb{H}$ se comporte en $\mathcal{O}(p^3)$ en borne uniforme sur Σ .

2 | Asymptotics for Toeplitz operators with symbol an indicator function on a symplectic manifold

2.1 Introduction

In Hamiltonian mechanics, the phase space is a symplectic manifold (X, ω) . In the procedure known as quantization, one endows (X, ω) with a Hilbert space H . The goal is to map functions on X representing classical observables (e.g., position and momentum), to operators acting on the space H , whose elements represent quantum states (e.g., wavefunctions). This mapping has to be consistent with both classical and quantum mechanical formalisms. However, there is no canonical way to quantize the symplectic manifold (X, ω) .

In the theory of *geometric quantization* introduced independently by Kostant [29] and Souriau [43], the manifold (X, ω) is *prequantized*: it is endowed with a *prequantum line bundle*, which is a line bundle L over X whose curvature form coincides with the symplectic form. One way to quantize a prequantized symplectic manifold is through *Berezin–Toeplitz quantization*, where the operators $T_{f,p}$ are *Toeplitz operators* acting on the space H_p of sections of the p -th tensor power of L . To ensure a compatibility condition between the formalisms of quantum and Hamiltonian mechanics in the semiclassical limit $p \rightarrow \infty$ known as the correspondence principle, the observables f are usually assumed to be bounded smooth functions, but interesting results can still be obtained with weaker regularity assumptions on f .

For instance, when (X, ω) is a compact Kähler manifold and L is a holomorphic Hermitian line bundle over X , the operators $T_{f,p}$ are defined by $T_{f,p} := P_p f P_p$, where P_p is the projection on the space $\mathcal{H}_p$ of holomorphic sections of L^p . In that case, Charles–Estienne obtain in [18, Theorem 1.2] the full asymptotic expansion in $p \rightarrow \infty$ of the trace of $g(T_{\mathbf{1}_W,p})$, where g is a polynomial and $\mathbf{1}_W$ is the indicator function of a domain W inside X with smooth boundary. They find an application of their expansion in the study of entanglement entropy for free Fermions [18, §7]. Also in [40, §6], Polterovich remarked

CHAPTER 2

that Toeplitz operators with piecewise constant symbol may be a relevant tool to infer the homotopy type of a quantum phase space.

In this paper we are interested in the case where (X, ω) is a symplectic manifold of bounded geometry endowed with a prequantum Hermitian line bundle L and a Hermitian vector bundle E over X . In this setting, the operators $T_{f,p} = P_p f P_p$ act on sections of $L^p \otimes E$, and P_p denotes the projection on a closed subspace $\mathcal{H}_p$ of the space of square-integrable sections $L^2(X, L^p \otimes E)$ for the metrics on L and E . In our case $\mathcal{H}_p$ is a spectral space associated to a renormalisation of the Bochner Laplacian. By the Schwartz kernel theorem and the ellipticity of Δ_p , the projector P_p has a smooth kernel, known as the *Bergman kernel* or to be more specific, the *generalized Bergman kernel* [35].

We prove asymptotics for the kernel of Toeplitz operators with symbol an indicator function of a compact domain W inside X with smooth boundary V . Moreover, as in the Kähler situation of Charles–Estienne in [18], we also obtain the asymptotics of the trace of $g(T_{1_{W,p}})$ for g a polynomial (see Corollaries 2.4 and 2.5). Two key results are essential to our proof. The first one is the asymptotic expansion of the Bergman kernel in a neighborhood of the diagonal established by Dai–Liu–Ma [20, Theorem 4.18], Ma–Marinescu [34, Chapter 8] and Kordyukov–Ma–Marinescu [28, Theorem 4.3]. The second one is the exponential decay property of the Bergman kernel outside the diagonal established by Ma–Marinescu [38, Theorem 1], and Kordyukov–Ma–Marinescu [28, Theorem 1.2].

Let us mention that previous known results on kernel asymptotics for the operators $T_{f,p}$ were obtained with stronger regularity assumptions on f . On a compact symplectic manifold and for $\mathcal{H}_p$ the kernel of the spin^c -Dirac operator, Ma–Marinescu [34, Lemma 7.2.4, §8.1.2], [36, Lemma 4.6] proved a full off-diagonal expansion for the kernel of Toeplitz operators with symbol f when f is smooth. Also in [8, §3], Barron, Ma, Marinescu and Pinsonnault prove kernel asymptotics of Toeplitz operators when f is $\mathcal{C}^k$ and $\mathcal{H}_p$ the kernel of the spin^c -Dirac operator. In [19], Charles and Polterovich also studied the Berezin-Toeplitz quantization of $\mathcal{C}^k$ functions.

We now state our results. Let (X, ω) be a symplectic manifold of dimension $2n$. Let (L, h^L) be a Hermitian line bundle over X and (E, h^E) be a Hermitian vector bundle over X , both endowed with Hermitian connections ∇^L and ∇^E , with curvatures $R^L := (\nabla^L)^2$ and $R^E := (\nabla^E)^2$. We assume that L satisfies the prequantization condition

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L = \omega. \quad (2.1)$$

We endow (X, ω) with a *complete Riemannian metric* g^{TX} . Let $J : TX \rightarrow TX$ be an almost-complex structure on X compatible with ω and g^{TX} . Let $J_0 : TX \rightarrow TX$ be the

skew-adjoint linear map which satisfies

$$\omega(u, v) = g^{TX}(J_0 u, v), \quad u, v \in TX, \quad (2.2)$$

then $J = J_0(-J_0^2)^{-1/2}$. We suppose that (X, L, E) has *bounded geometry*: the injectivity radius inj^X of (X, g^{TX}) is positive and the derivatives of any order of R^L, R^E, J, g^{TX} are uniformly bounded on X . Let $\Delta^{L^p \otimes E} = (\nabla^{L^p \otimes E})^* \nabla^{L^p \otimes E}$ denote the Bochner Laplacian (see (2.65)) associated to ∇^L, ∇^E and g^{TX} , with $(\nabla^{L^p \otimes E})^*$ the formal adjoint of $\nabla^{L^p \otimes E}$. Define by

$$\Delta_p := \Delta^{L^p \otimes E} - p\tau, \quad \text{with} \quad \tau(x) := -\pi \text{Tr}[(JJ_0)(x)], \quad x \in X, \quad (2.3)$$

the *renormalized Bochner Laplacian* acting on $\mathcal{C}^\infty(X, L^p \otimes E)$, as originally introduced by Guillemin and Uribe in [25]. Assume

$$\mu_0 := \inf_{x \in X, u \in T_x X \setminus \{0\}} \frac{\sqrt{-1} R_x^L(u, Ju)}{|u|_{g^{TX}}^2} > 0. \quad (2.4)$$

By [28, Theorem 1.1], [33, Corollary 1.2], we have the following spectral gap property: there exists $C_L > 0$ such that for any $p \in \mathbb{N}$ the spectrum of Δ_p satisfies

$$\text{Spec}(\Delta_p) \subset [-C_L, C_L] \cup [2p\mu_0 - C_L, +\infty[. \quad (2.5)$$

For p large enough, as in [35], [34, Chapter 8], [28], let $\mathcal{H}_p([-C_L, C_L]) \subset L^2(X, L^p \otimes E)$ denote the closed subspace of $L^2(X, L^p \otimes E)$ given by the spectral space corresponding to $[-C_L, C_L]$. Let P_p be the spectral projector corresponding to $[-C_L, C_L]$, called the *generalized Bergman projector* associated with Δ_p in the sense of [35]:

$$P_p : L^2(X, L^p \otimes E) \rightarrow \mathcal{H}_p([-C_L, C_L]). \quad (2.6)$$

By the Schwartz kernel theorem, P_p has a distribution kernel with respect to the Riemannian volume form dv_X of (X, g^{TX}) . Its kernel $P_p(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(X \times X, (L^p \otimes E) \boxtimes (L^p \otimes E)^*)$ is called the *generalized Bergman kernel* as in [35]. As in [34, Remark 1.4.3, Problem 1.5], the smoothness of P_p comes from the ellipticity of the operator Δ_p . Let $d(x, x')$ denote the geodesic distance between two points $x, x' \in X$. By [28, Theorem 1.2], [38, Theorem 1], we have the following exponential estimates: there exists $c > 0$ such that for any $l > 0$, there exists $C_l > 0$ such that for any $p \in \mathbb{N}$ and $x, x' \in X$, we have

$$|P_p(x, x')|_{\mathcal{C}^l(X \times X)} \leq C_l p^{n+\frac{l}{2}} e^{-c\sqrt{p}d(x, x')}. \quad (2.7)$$

CHAPTER 2

In the above inequality the norm $\mathcal{C}^l(X \times X)$ denotes the pointwise $\mathcal{C}^l$ -seminorm of the section P_p at the point $(x, x') \in X \times X$, which is the sum of the norms induced by h^L, h^E, g^{TX} of the derivatives up to order l of P_p for $\nabla^{L^p \otimes E}$ and ∇^{TX} evaluated at (x, x') . The generalized Bergman kernel P_p also admits an asymptotic expansion in p , which has been established by Ma–Marinescu [34, Chapter 8] and Lu–Ma–Marinescu [32]. In particular by [34, Problem 6.1], as in [38, Theorem 6], there exist smooth coefficients $b_r \in \mathcal{C}^\infty(X, \text{End}(E))$ such that for any $k, l \in \mathbb{N}$, there exists $C_{k,l} > 0$ such that for any $x \in X, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| P_p(x, x) - \sum_{r=0}^k b_r(x) p^{n-r} \right|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C_{k,l} p^{n-k-1}, \quad (2.8)$$

moreover if we denote by $T^{(1,0)}X := \text{Ker}(J - \sqrt{-1}\text{Id}) \subset TX \otimes \mathbb{C}$ the holomorphic tangent bundle and by $\dot{R}^L \in \text{End}(T^{(1,0)}X)$ the endomorphism defined by

$$R^L(Z, \bar{Z}') = \langle \dot{R}^L Z, Z' \rangle, \quad Z, Z' \in T^{(1,0)}X, \quad (2.9)$$

we have $b_0 = \det(\dot{R}^L/2\pi)$.

In this paper we will use a refined version of the off-diagonal expansion for the generalized Bergman kernel stated in the work of Kordyukov–Ma–Marinescu [28, Theorem 4.3] (see Theorem 2.15 of this paper).

For $f \in L^\infty(X)$, the *Toeplitz operator with symbol f* is the family of operators acting on $\mathcal{H}_p([-C_L, C_L])$ defined by

$$T_{f,p} := P_p M_f P_p, \quad (2.10)$$

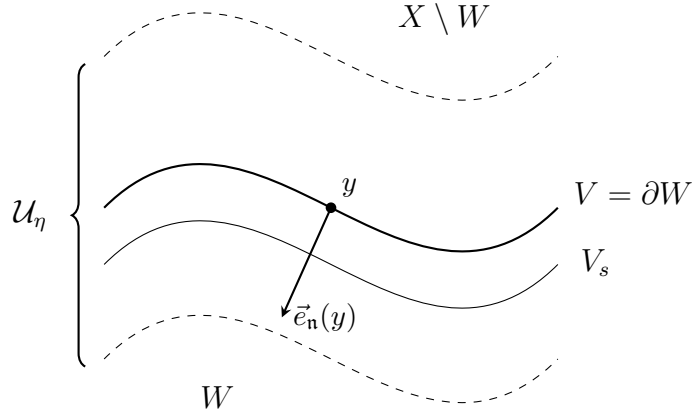
where M_f denotes the multiplication by f . Let $W \subset X$ be a compact domain with smooth boundary $V = \partial W$. We consider the Toeplitz operator with symbol the indicator function of W

$$T_{W,p} := P_p M_{\mathbf{1}_W} P_p, \quad \text{with} \quad \mathbf{1}_W(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in W, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Let $\exp_{x_0}^X : T_{x_0}X \rightarrow X$ denote the exponential map for (X, g^{TX}) at $x_0 \in X$. Let $\mathcal{U}_\eta \subset X$ be a tubular neighborhood of V and $V_s \subset \mathcal{U}_\eta$ the hypersurface at distance $s \in]-\eta/2, \eta/2[$ of V , i.e.

$$V_s := \{\exp_y^X(se_n(y)) : y \in V\}, \quad (2.12)$$

where $e_n(y)$ is the *inward pointing unit normal* vector at $y \in V$, as represented in Figure 2.1.

Figure 2.1 – The case $s \in [0, \eta/2]$.

As a particular case of Lemma 2.23 and Theorem 2.24, our first result states as follows.

Theorem 2.1. *Assume (X, g^{TX}) is complete, (X, L, E) has bounded geometry, i.e., $\text{inj}^X > 0$ and the derivatives of any order of R^L, R^E, J, g^{TX} are uniformly bounded on X , and assume (2.4). Let W be a compact domain of X with smooth boundary V and $\mathcal{U}_\eta$ a tubular neighborhood of V . Then the following statements hold:*

1. *There exist $p_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$ such that for $l \in \mathbb{N}$, there exist $C_{l,W}, C'_{l,W}, C''_{l,W} > 0$ such that for any $p \geq p_0$:*

(i) *If $x, x' \in X$,*

$$|T_{W,p}(x, x')|_{\mathcal{C}^l(X \times X)} \leq C_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, x')}. \quad (2.13)$$

(ii) *If $x \in W \setminus V$,*

$$|T_{W,p}(x, x) - P_p(x, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C'_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)}. \quad (2.14)$$

(iii) *If $x \in X \setminus W$,*

$$|T_{W,p}(x, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C''_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)}. \quad (2.15)$$

2. *There exist $\text{End}(E)$ -valued polynomials $q_{r,x}$ with smooth coefficients in x such that for $x \in \mathcal{U}_\eta$, if $x \in V_s$ for some $s \in]-\eta/2, \eta/2[$,*

$$T_{W,p}(x, x) = P_p(x, x) \text{erfc}(-s\sqrt{p\pi}\alpha_x) + \sum_{r=1}^{\infty} p^{n-r/2} q_{r,x}(p^{1/2}s) \exp(-s^2 p \pi \alpha_x) + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (2.16)$$

with $\alpha_x := \omega(e_n, J e_n)(x)$ and $P_p(x, x)$ has the asymptotics (2.8). In the particular case where $J = J_0$, we have $\alpha_x = 1$.

The complementary error function erfc appearing in (2.16) is defined for $x \in \mathbb{R}$ by the

CHAPTER 2

formulas

$$\operatorname{erfc}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \operatorname{erf}(x), \quad \text{with} \quad \operatorname{erf}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (2.17)$$

where the function $\operatorname{erf}(x)$ is called the error function.

The asymptotics we derive provide the following interpretation: in the semiclassical limit, the kernel $T_{W,p}(x, x)$ on the diagonal mimics the behavior of the Bergman kernel for x in the interior of W . Conversely, on the complement $X \setminus W$, $T_{W,p}(x, x)$ exhibits exponential decay in $\sqrt{p}$ times the distance to the boundary. The asymptotic formula (2.16) characterizes the transition at the interface, where the shift from Bergman kernel-like behavior to exponential decay is governed by the error function term $\operatorname{erfc}(-s\sqrt{p\pi\alpha_x})$. Furthermore, at $s = 0$ (where $x \in V$), half-integer powers emerge in the asymptotics of $T_{W,p}(x, x)$.

Remarks 2.2. *We make the following observations:*

- (i) *For convenience, we intentionally left out a factor 2 in the definition of the functions erf and erfc in (2.17).*
- (ii) *In our proof we do not really use the compactness assumption on W , and the statement of Theorem 2.1 should hold if we assume that the boundary V admits a tubular neighborhood $\mathcal{U}_\eta$, and has bounded geometry.*
- (iii) *The kernel asymptotics we derive exhibit behavior similar to that of the partial Bergman kernels as established by Zelditch and Zhou [49], with "erfc" asymptotics along the boundary V (see [49, Main Theorem] for comparison).*

We also obtain the following kernel asymptotics for $g(T_{W,p})$ when g is a polynomial vanishing at 0 and 1.

Theorem 2.3. *Assume (X, g^{TX}) is complete, (X, L, E) has bounded geometry, i.e., $\operatorname{inj}^X > 0$ and the derivatives of any order of R^L, R^E, J, g^{TX} are uniformly bounded on X , and assume (2.4). Let W be a compact domain of X with smooth boundary V and $\mathcal{U}_\eta$ a tubular neighborhood of V . Let g be a polynomial such that $g(0) = g(1) = 0$.*

1. *There exist $p_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$ such that for $l \in \mathbb{N}$, there exist $C_{l,g,n} > 0$ such that for any $p \geq p_0$, if $x \in X \setminus V$,*

$$|g(T_{W,p})(x, x)|_{\mathcal{E}^l(X)} \leq C_{l,g,n} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x,V)}. \quad (2.18)$$

2. *There exist smooth $\operatorname{End}(E)$ -valued functions $I_{r,g,x}(s)$, with fast decay of the form $\mathcal{O}((1+|s|)^{M_{r,g}} e^{-c's^2})$ as $|s| \rightarrow \infty$, and depending smoothly on x such that for $x \in \mathcal{U}_\eta$,*

if $x \in V_s$ for some $s \in]-\eta/2, \eta/2[$,

$$g(T_{W,p})(x, x) = \sum_{r=0}^{\infty} p^{n-r/2} I_{r,g,x}(p^{1/2}s) + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (2.19)$$

with

$$I_{0,g,x}(s) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\operatorname{erfc}(y)) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y+s\sqrt{2\pi\alpha_x})^2} dy \right] \det(\dot{R}^L/2\pi) \operatorname{Id}_{\operatorname{End}(E)}, \quad (2.20)$$

and $\alpha_x = \omega(e_n(x), Je_n(x))$. If $s = 0$, i.e. if $x \in V$ in (2.19), we get

$$I_{0,g,x}(0) = \left(\int_0^1 g(y) dy \right) \det(\dot{R}^L/2\pi) \operatorname{Id}_{\operatorname{End}(E)}. \quad (2.21)$$

In the particular case where $J = J_0$, we have $\alpha_x = 1$ and $\det(\dot{R}^L/2\pi) = 1$.

Note that the integral term in (2.20) is the convolution of $g \circ \operatorname{erfc}$ and a Gaussian. Also note that by combining Theorem 2.1, Theorem 2.3 and (2.8) we can get the on-diagonal expansion of $g(T_{W,p})$ for g any polynomial.

From the above Theorem, we deduce asymptotics for the trace of $T_{W,p}$. For $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, let

$$\tilde{g}(x) := g(x) - g(0)(1-x) - g(1)x. \quad (2.22)$$

We define $I(g)$ by

$$I(g) := \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\operatorname{erfc}(x)) dx. \quad (2.23)$$

Let $C(V)$ be the quantity defined by

$$C(V) := \int_V \left[\det(J_{0,x_0}|_{H_V}) \alpha_{x_0} \right]^{1/2} dv_V(x_0), \quad (2.24)$$

with $H_{x_0}V = T_{x_0}V \cap J_{x_0}T_{x_0}V$ the maximal complex subspace of $T_{x_0}V$, and $\alpha_{x_0} = \omega(e_n, Je_n)(x_0)$. As a corollary of Theorem 2.1 and Theorem 2.3, the third result of this paper states as follows.

Corollary 2.4. *Assume (X, g^{TX}) is complete, (X, L, E) has bounded geometry, i.e., $\operatorname{inj}^X > 0$ and the derivatives of any order of R^L, R^E, J, g^{TX} are uniformly bounded on X , and assume (2.4). Let W be a compact domain of X with smooth boundary V . Let $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a polynomial vanishing at 0. We have the expansion*

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(g(T_{W,p})) &= \sum_{k \geq 0} p^{n-k/2} a_k(g) + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad \text{with} \\ a_0(g) &= g(1) \operatorname{rk}(E) \int_W \det(\dot{R}^L/2\pi) dv_X, \quad a_1(g) = (2\pi)^{-1/2} \operatorname{rk}(E) C(V) I(g). \end{aligned} \quad (2.25)$$

CHAPTER 2

In particular if $J_0 = J$, then $\alpha_{x_0} = 1$, $C(V) = \text{vol}(V)$, $a_0(g) = g(1) \text{rk}(E) \text{vol}(W)$ and $a_1(g) = \text{rk}(E) \text{vol}(V) I(g)$.

As a consequence of Corollary 2.4 we obtain the following Weyl law for the Toeplitz operator $T_{W,p}$.

Corollary 2.5. *Assume (X, g^{TX}) is complete, (X, L, E) has bounded geometry, i.e., $\text{inj}^X > 0$ and the derivatives of any order of R^L, R^E, J, g^{TX} are uniformly bounded on X , and assume (2.4). Let W be a compact domain of X with smooth boundary V . If $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, Hölder continuous at 0 and 1 and $g(0) = 0$, we have*

$$\text{Tr}(g(T_{W,p})) = a_0(g)p^n + a_1(g)p^{n-1/2} + o(p^{n-1/2}), \quad (2.26)$$

and for $0 < a < b < 1$, the concentration of eigenvalues of $T_{W,p}$ in $[a, b]$ verifies

$$\left| \text{Spec}(T_{W,p}) \cap [a, b] \right| = p^{n-1/2} \frac{\text{rk}(E)C(V)}{\sqrt{2\pi}} (\text{erfc}^{-1}(a) - \text{erfc}^{-1}(b)) + o(p^{n-1/2}). \quad (2.27)$$

Moreover, we have, for $0 < \varepsilon < 1/2$,

$$\left| \text{Spec}(T_{W,p}) \cap [1 - \varepsilon, 1] \right| = p^n \text{rk}(E) \int_W \det(\dot{R}^L/2\pi) dv_X + o(p^n). \quad (2.28)$$

In particular if $J_0 = J$, then $C(V) = \text{vol}(V)$ and $\det(\dot{R}^L/2\pi) = 1$.

The above corollary shows that the operator $T_{W,p}$ asymptotically behaves like a projection: the spectrum of $T_{W,p}$ concentrates near 0 and 1 in the semiclassical limit. Note that the kernel of $T_{W,p}$ can be infinite dimensional since X is not necessarily compact.

Remarks 2.6. *In the case where (X, J, ω, g^{TX}) is a compact Kähler manifold, $E = \mathbb{C}$, and (L, h^L) is a holomorphic Hermitian prequantum line bundle over X ,*

- (i) *As a particular case of Corollary 2.4 and Corollary 2.5, we recover the results established by Charles–Estienne in [18, Theorem 1.2, Corollary 1.3].*
- (ii) *The asymptotic behavior of the spectrum of $T_{W,p}$ near 0 and 1 has been studied by Berndtsson [10] and Lindholm [31]. In particular, we get (2.28) by adapting the proof of [10, Theorem 3.1].*

Our paper is organized as follows. In Section 2.2, we work in the context of the Bargmann space and compute the kernel of the Toeplitz operator whose symbol is the indicator function $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}$ of the half-plane $\mathbb{H}_s := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > s\}$. We also consider the more general situation where the symbol is the product of $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}$ and a polynomial. In Section 2.3, we express in Corollary 2.21 the off-diagonal Bergman kernel asymptotics

of [28, Theorem 4.3] in Fermi coordinates adapted to a tubular neighborhood of the boundary V of W . The proofs of our main theorems are contained in Section 2.4. In § 2.4.1, we combine the results of Section 2.2 and Section 2.3 to obtain in Theorem 2.24 the full off-diagonal kernel asymptotics for $T_{W,p}$. Theorem 2.1 is a particular case of this result and of Lemma 2.23. In § 2.4.2, we prove Theorem 2.3. Finally, in § 2.4.3, we prove Corollary 2.4 and Corollary 2.5. In § 2.4.4, we prove a technical result stated in Lemma 2.25.

2.2 The case of the Bargmann space

In this section we recall the model case of [35, §1.4] for the complex plane and in Sect. 2.2.1 we compute the kernel of the Toeplitz operator with symbol $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}$, the indicator function of the *half-plane at distance s of the x -axis* $\mathbb{H}_s := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > s\}$ for $s \in \mathbb{R}$. We then treat the case where the symbol is a product of a polynomial and $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}$. The results are stated in Lemma 2.7 and Corollary 2.9. In Sect. 2.2.2 we study how the expressions we derive for the kernels behave in terms of the distance to the boundary of $\mathbb{H}_s$.

This setting is pictured in Figure 2.2 below and is a good model for what happens at the hypersurface V_{-s} at distance $-s$ of the boundary V of W , as in (2.12). It will resurface later on in Section 2.4.1.

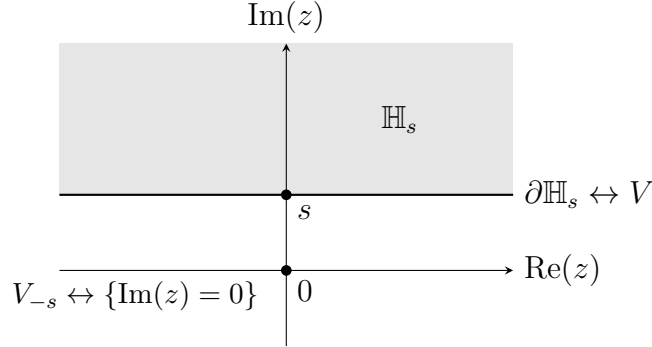


Figure 2.2 – Analogy with the general setting, for $s > 0$.

Let us denote by b_α and b_α^+ the complex creation and annihilation operators with domain $L^2(\mathbb{C})$ and defined by, for $\alpha > 0$,

$$b_\alpha := -2\frac{\partial}{\partial z} + \pi\alpha\bar{z}, \quad b_\alpha^+ := 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \pi\alpha z. \quad (2.29)$$

Let $\mathcal{L} := b_\alpha b_\alpha^+$ be the harmonic oscillator. An orthonormal basis of $\ker \mathcal{L} \cap L^2(\mathbb{C})$ is given

CHAPTER 2

by the complex Hermite polynomials

$$h_{k,\alpha}(z) = \alpha^{1/2} \sqrt{\frac{\pi^k \alpha^k}{k!}} z^k \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}|z|^2\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

and the projector $P_\alpha : L^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ker \mathcal{L}$ is a kernel operator with kernel given by

$$P_\alpha(z, z') = \sum_{k=0}^{+\infty} h_{k,\alpha}(z) \overline{h_{k,\alpha}(z')} = \alpha \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2 - 2z\bar{z}')\right). \quad (2.31)$$

2.2.1 Toeplitz operator with symbol the indicator of the half-plane $\mathbb{H}_s$. Let $T_\alpha^s := P_\alpha M_{\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}} P_\alpha$ be the Toeplitz operator with symbol $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}$ and $T_\alpha^{s,c}$ the Toeplitz operator with symbol $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s^c}$ where $\mathbb{H}_s^c = \mathbb{C} \setminus \mathbb{H}_s$. The error function erf introduced in (2.17) extends to $\mathbb{C}$ as the holomorphic function defined by

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\zeta^2) d\zeta. \quad (2.32)$$

The above integral does not depend on the smooth path from 0 to $z \in \mathbb{C}$, and the function erfc introduced in (2.17) admits an analytic continuation as well. We have the equalities

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{2} - \operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erfc}(-z) = 1 - \operatorname{erfc}(z), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{erfc}(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[z \operatorname{erfc}(z) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \right] = \operatorname{erfc}(z). \quad (2.34)$$

Lemma 2.7. *For $z, z' \in \mathbb{C}$ the following holds*

$$T_\alpha^s(z, z') = P_\alpha(z, z') \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\pi\alpha} \left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i} \right) \right), \quad (2.35)$$

$$T_\alpha^{s,c}(z, z') = P_\alpha(z, z') \operatorname{erfc} \left(-\sqrt{\pi\alpha} \left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i} \right) \right). \quad (2.36)$$

Proof. Let F_a and G denote the holomorphic functions defined by, for $a \in \mathbb{R}$,

$$F_a(z) := \int_a^{+\infty} \exp(-\pi\alpha y^2 - \pi\alpha yz) dy, \quad G(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi\alpha x^2 - \pi\alpha xz) dx. \quad (2.37)$$

Notice F_a is the Laplace transform of a Gaussian, and we get for $t \in \mathbb{R}$,

$$F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp(\pi\alpha t^2/4) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\pi\alpha} (a + t/2) \right), \quad G(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp(\pi\alpha t^2/4). \quad (2.38)$$

By the identity theorem, for $z \in \mathbb{C}$ we have

$$F_a(z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(\pi\alpha z^2/4\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\pi\alpha}(a + z/2)\right), \quad G(z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(\pi\alpha z^2/4\right). \quad (2.39)$$

By definition we have

$$T_\alpha^s(z, z') = \int_{\mathbb{H}_s} P_\alpha(z, z'') P_\alpha(z'', z') d\lambda(z''), \quad (2.40)$$

where λ denotes the Lebesgue measure. The equality above becomes

$$\begin{aligned} T_\alpha^s(z, z') &= \alpha^2 \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right) \\ &\quad \times \int_{\operatorname{Im}(z'') > s} \exp\left(-\pi\alpha|z''|^2 + \pi\alpha z \bar{z}'' + \pi\alpha z'' \bar{z}'\right) d\lambda(z''). \end{aligned} \quad (2.41)$$

By writing $z'' = x'' + iy''$ we get

$$T_\alpha^s(z, z') = \alpha^2 \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right) G(-(z + \bar{z}')) F_s(i(z - \bar{z}')). \quad (2.42)$$

By (2.39) we get

$$G(-(z + \bar{z}')) F_s(i(z - \bar{z}')) = \alpha^{-1} \exp(\pi\alpha z \bar{z}') \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\pi\alpha}\left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i}\right)\right), \quad (2.43)$$

which proves (2.35). The equality $\operatorname{erfc}(-z) = 1 - \operatorname{erfc}(z)$ proves (2.36). $\square$

We now compute the kernel of Toeplitz operators with symbol $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}(z) f(\sqrt{\pi\alpha}z, \sqrt{\pi\alpha}\bar{z})$ where f is a polynomial in $z, \bar{z}$. Let us denote by $T_{\alpha,p,q}^s$ the Toeplitz operator with symbol $z \mapsto (\sqrt{\pi\alpha}z)^p (\sqrt{\pi\alpha}\bar{z})^q \mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}$ and $T_{\alpha,p,q}^{s,c}$ defined in the same way for $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s^c}$. Let $T_{\alpha,p,q}$ be the Toeplitz operator with symbol $(\sqrt{\pi\alpha}z)^p (\sqrt{\pi\alpha}\bar{z})^q$. Then we have $T_{\alpha,p,q}^s + T_{\alpha,p,q}^{s,c} = T_{\alpha,p,q}$. In particular we recover $T_\alpha^s + T_\alpha^{s,c} = P_\alpha$.

Lemma 2.8. *For $p, q \in \mathbb{N}$ we have*

$$\begin{aligned} T_{\alpha,p,q}(z, z') &= \alpha \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right) \frac{1}{(\pi\alpha)^{(p+q)/2}} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}'^p} \frac{\partial^q}{\partial z^q} [\exp(\pi\alpha z \bar{z}')] \\ &= (\sqrt{\pi\alpha}z)^p (\sqrt{\pi\alpha}\bar{z}')^q P_\alpha(z, z'), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha,p,q}^s(z, z') &= \alpha \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right) \\ &\quad \times \frac{1}{(\pi\alpha)^{(p+q)/2}} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}'^p} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \left[\exp(\pi\alpha z \bar{z}') \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\pi\alpha}\left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

CHAPTER 2

We also get

$$T_{\alpha,p,q}^{s,c}(z, z') = \alpha \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right) \times \frac{1}{(\pi\alpha)^{(p+q)/2}} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}'^p} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \left[\exp(\pi\alpha z \bar{z}') \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\pi\alpha}\left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i}\right)\right) \right]. \quad (2.46)$$

Proof. As in the proof of Lemma 2.7, we have

$$T_{\alpha,p,q}^s(z, z') = \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right) \times \int_{\operatorname{Im}(z'') > s} \alpha^2 (\pi\alpha)^{(p+q)/2} z''^p \bar{z}''^q \exp\left(-\pi\alpha|z''|^2 + \pi\alpha z \bar{z}'' + \pi\alpha z'' \bar{z}'\right) d\lambda(z''). \quad (2.47)$$

The above equation writes as

$$T_{\alpha,p,q}^s(z, z') = \alpha^2 \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(|z|^2 + |z'|^2)\right) \times \frac{1}{(\pi\alpha)^{(p+q)/2}} \frac{\partial^p}{\partial \bar{z}'^p} \frac{\partial^q}{\partial z^q} \int_{\operatorname{Im}(z'') > s} \exp\left(-\pi\alpha|z''|^2 + \pi\alpha z \bar{z}'' + \pi\alpha z'' \bar{z}'\right) d\lambda(z''). \quad (2.48)$$

We did compute the integral above in the proof of Lemma 2.7, which proves (2.45). The same method proves (2.46). $\square$

The following corollary is a consequence of (2.34), (2.45) and (2.46).

Corollary 2.9. *Let f be a polynomial in $\sqrt{\pi\alpha}z, \sqrt{\pi\alpha}\bar{z}$ and $T_{\alpha,f}, T_{\alpha,f}^s$ and $T_{\alpha,f}^{s,c}$ the Toeplitz operators with symbols $f, \mathbf{1}_{\mathbb{H}_s}f$ and $\mathbf{1}_{\mathbb{H}_s^c}f$. Then there exists a polynomial $Q(f)$ of degree less than $\deg f$ such that*

$$T_{\alpha,f}(z, z') = f(\sqrt{\pi\alpha}z, \sqrt{\pi\alpha}\bar{z}') P_{\alpha}(z, z'), \quad (2.49)$$

$$T_{\alpha,f}^s(z, z') = T_{\alpha,f}(z, z') \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\pi\alpha}\left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i}\right)\right) + Q(f)(\sqrt{\pi\alpha}z, \sqrt{\pi\alpha}\bar{z}', \sqrt{\pi\alpha}s) P_{\alpha}(z, z') \exp\left(-\pi\alpha\left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i}\right)^2\right), \quad (2.50)$$

$$T_{\alpha,f}^{s,c}(z, z') = T_{\alpha,f}(z, z') \operatorname{erfc}\left(-\sqrt{\pi\alpha}\left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i}\right)\right) - Q(f)(\sqrt{\pi\alpha}z, \sqrt{\pi\alpha}\bar{z}', \sqrt{\pi\alpha}s) P_{\alpha}(z, z') \exp\left(-\pi\alpha\left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i}\right)^2\right). \quad (2.51)$$

Remark 2.10. The formula (2.49) is a particular case of the functional calculus developed by Ma–Marinescu as in [34, §7.1]. In our case we will use the formulas (2.50) and (2.51) since we did not manage to get a functional calculus. The difficulty comes from the error function term erfc that appears after integration over the half plane $\mathbb{H}_s$, which is the reason why we fail to obtain a formula for the kernel of the composition $T_{\alpha,f}^s \circ T_{\alpha,g}^s$, with f, g polynomials in $\sqrt{\pi\alpha}z, \sqrt{\pi\alpha}\bar{z}$.

2.2.2 Exponential decay in s . From the previous computations, we notice that the kernels of the Toeplitz operators $T_{\alpha,f}^s, T_{\alpha,f}^{s,c}$ have a form of exponential decay in s at $(0,0)$, which we state more precisely as an inequality in Corollary 2.12. Unfortunately, we were unable to prove that this inequality is preserved under the composition of Toeplitz operators.

As in [41], for $z = x + iy$, by computing the integral in (2.32) along the paths $\Gamma_1(u) = u, \quad u \in [0, x]$ and $\Gamma_2(u) = x + iu, \quad u \in [0, y]$ we get

$$\operatorname{erf}(z) = \operatorname{erf}(x) + e^{-x^2} \int_0^y e^{u^2} \sin(2xu) du + ie^{-x^2} \int_0^y e^{u^2} \cos(2xu) du. \quad (2.52)$$

By (2.33), we obtain

$$\operatorname{erfc}(z) = \operatorname{erfc}(x) - e^{-x^2} \int_0^y e^{u^2} \sin(2xu) du - ie^{-x^2} \int_0^y e^{u^2} \cos(2xu) du. \quad (2.53)$$

For $x > 0$, since $0 \leq \operatorname{erfc}(x) \leq e^{-x^2}$ we have the inequality

$$|\operatorname{erfc}(z)| \leq e^{-x^2} (1 + 2|y|e^{y^2}), \quad (2.54)$$

which gives if $z = x + iy, z' = x' + iy'$ and $y + y' \leq 2s$

$$\begin{aligned} & \left| \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\pi\alpha} \left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i} \right) \right) \right| \\ & \leq \left[1 + \sqrt{\pi\alpha} |x - x'| \exp \left(\frac{\pi\alpha}{4} (x - x')^2 \right) \right] \exp \left(-\pi\alpha \left(s - \frac{y + y'}{2} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

on the other hand if $x \leq 0$, $\operatorname{erfc}(-x) \leq e^{-x^2}$, therefore if $y + y' \geq 2s$,

$$\begin{aligned} & \left| \operatorname{erfc} \left(-\sqrt{\pi\alpha} \left(s - \frac{z - \bar{z}'}{2i} \right) \right) \right| \\ & \leq \left[1 + \sqrt{\pi\alpha} |x - x'| \exp \left(\frac{\pi\alpha}{4} (x - x')^2 \right) \right] \exp \left(-\pi\alpha \left(s - \frac{y + y'}{2} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

CHAPTER 2

We also have the following inequality on the Bergman kernel

$$|P_\alpha(z, z')| \leq \alpha \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}(x-x')^2 - \frac{\pi\alpha}{2}(y-y')^2\right), \quad (2.57)$$

which gets us if $y + y' \leq 2s$

$$|T_\alpha^s(z, z')| \leq \alpha \left(1 + \sqrt{\pi\alpha}|z - z'|\right) \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}|z - z'|^2\right) \exp\left(\frac{\pi\alpha}{4}(s - y + s - y')^2\right), \quad (2.58)$$

and if $y + y' \geq 2s$,

$$|T_{\alpha}^{s,c}(z, z')| \leq \alpha \left(1 + \sqrt{\pi\alpha}|z - z'|\right) \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}|z - z'|^2\right) \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}(s - y + s - y')^2\right). \quad (2.59)$$

In the same way by Corollary 2.9 we get the following result.

Proposition 2.11. *For f polynomial there exist $C > 0$, $M_f \geq 0$ such that for $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^2$, if $y + y' \leq 2s$,*

$$\begin{aligned} |T_{\alpha,f}^s(z, z')| &\leq \alpha C \left(1 + \sqrt{\pi\alpha}|z| + \sqrt{\pi\alpha}|z'| + \sqrt{\pi\alpha}|s|\right)^{M_f} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}|z - z'|^2\right) \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}(s - y + s - y')^2\right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

If $y + y' \geq 2s$,

$$\begin{aligned} |T_{\alpha,f}^{s,c}(z, z')| &\leq \alpha C \left(1 + \sqrt{\pi\alpha}|z| + \sqrt{\pi\alpha}|z'| + \sqrt{\pi\alpha}|s|\right)^{M_f} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}|z - z'|^2\right) \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}(s - y + s - y')^2\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

We can simplify the above proposition to state the following corollary.

Corollary 2.12. *If $s \geq 0$, $\text{Im}(z) \leq 0$, $\text{Im}(z') \leq 0$,*

$$|T_{\alpha,f}^s(z, z')| \leq \alpha C e^{-\pi\alpha s^2} \left(1 + \sqrt{\pi\alpha}|z| + \sqrt{\pi\alpha}|z'| + \sqrt{\pi\alpha}|s|\right)^{M_f} \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}|z - z'|^2\right). \quad (2.62)$$

If $s \leq 0$, $\text{Im}(z) \geq 0$, $\text{Im}(z') \geq 0$,

$$|T_{\alpha,f}^{s,c}(z, z')| \leq \alpha C e^{-\pi\alpha s^2} \left(1 + \sqrt{\pi\alpha}|z| + \sqrt{\pi\alpha}|z'| + \sqrt{\pi\alpha}|s|\right)^{M_f} \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{4}|z - z'|^2\right). \quad (2.63)$$

Remark 2.13. *We could still get a version of Corollary 2.12 that holds for all values of z, z' by replacing the inequality $0 \leq \text{erfc}(x) \leq e^{-x^2}$ by $0 \leq \text{erfc}(x) \leq 1 + e^{-x^2}$ in the proof, however we would lose the decay in s by doing so.*

2.3 Bergman kernel asymptotics

This section is organized as follows. In Sect. 2.3.1 we enunciate the off-diagonal expansion of the generalized Bergman kernel obtained by Kordyukov–Ma–Marinescu in [28], which is a more detailed statement than the expansion (2.8) given in the introduction. In Sect. 2.3.2 we give the expression of the Bergman kernel in so-called Fermi coordinates adapted to a tubular neighborhood of the boundary V of W . In Sect. 2.3.3 we compute the asymptotic expansion of the correspondence between Fermi and normal coordinates. In Sect. 2.3.4 we derive asymptotics for the generalized Bergman kernel in Fermi coordinates from the off-diagonal expansion described Sect. 2.3.1. The technique is adapted from Finski [22, §5.2]. In the rest of the paper we will also use the term “Bergman kernel” to refer to the generalized Bergman kernel.

We quickly recall the context of [28] as in the introduction. Let (X, ω) be a symplectic manifold of dimension $m = 2n$ endowed with (L, h^L) a Hermitian line bundle and (E, h^E) a Hermitian vector bundle, with Hermitian connections ∇^L and ∇^E whose curvatures are denoted R^L and R^E . We assume L satisfies the prequantization condition (2.1).

We endow (X, ω) with a Riemannian metric g^{TX} with Levi-Civita connection ∇^{TX} , and curvature $R^{TX} := (\nabla^{TX})^2$. Let $J : TX \rightarrow TX$ be an almost-complex structure on X compatible with ω and g^{TX} , that is $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$, $g^{TX}(J\cdot, J\cdot) = g^{TX}(\cdot, \cdot)$ and $\omega(u, Ju) > 0$ for any $u \in TX, u \neq 0$. Let $J_0 : TX \rightarrow TX$ be the skew-adjoint linear map satisfying $\omega(u, v) = g^{TX}(J_0 u, v)$ for all $u, v \in TX$. Then we have $J = J_0(-J_0^2)^{-1/2}$, and J_0 commutes with J (see [35, Introduction]).

We assume X has *bounded geometry*, i.e., $\text{inj}^X > 0$ and the derivatives of any order of R^L, R^E, J, g^{TX} are uniformly bounded on X . We also assume

$$\mu_0 := \inf_{x \in X, u \in T_x X \setminus \{0\}} \frac{\sqrt{-1} R_x^L(u, Ju)}{|u|_{g^{TX}}^2} > 0. \quad (2.64)$$

Let $\Delta^{L^p \otimes E}$ be the *Bochner Laplacian* acting on sections of $L^p \otimes E$ associated with the connections $\nabla^{TX}, \nabla^L, \nabla^E$ and defined by the formula

$$\Delta^{L^p \otimes E} := - \sum_{i=1}^m \left[(\nabla_{e_i}^{L^p \otimes E})^2 - \nabla_{\nabla_{e_i}^{TX} e_i}^{L^p \otimes E} \right], \quad (2.65)$$

where $(e_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ is a local orthonormal frame of TX and $\nabla^{L^p \otimes E}$ denotes the connection on $L^p \otimes E$ associated with ∇^L, ∇^E . Then the *renormalized Bochner Laplacian* defined as in (2.3) has spectral gap (2.5). For p large enough, we define the *generalized Bergman projector* P_p as in (2.6). By the Schwartz kernel theorem, it is a kernel operator with respect to the Riemannian volume form dv_X of (X, g^{TX}) with kernel the *generalized Bergman*

CHAPTER 2

kernel $P_p(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(X \times X, (L^p \otimes E) \boxtimes (L^p \otimes E)^*)$. As in [34, Remark 1.4.3, Problem 1.5], the smoothness of P_p comes from the ellipticity of the operator Δ_p .

Remarks 2.14. *The asymptotic expansion of the Bergman kernel has a long history:*

- (i) *In the case where (X, J, ω, g^{TX}) is a compact Kähler manifold, $E = \mathbb{C}$ and (L, h^L) is a holomorphic Hermitian prequantum line bundle over X , the renormalised Bochner Laplacian Δ_p defined in (2.3) coincides with twice the Kodaira Laplacian $\square_p = \bar{\partial}^{L^p*} \bar{\partial}^{L^p}$, and $\mathcal{H}_p([-C_L, C_L])$ coincides with $\text{Ker } \square_p = H^0(X, L^p)$ the space of holomorphic sections of L^p . In that case, the kernel of the projector P_p is called the Bergman kernel, $b_0 = \text{Id}$, and the diagonal expansion (2.8) is a well known result from the works of Tian [47], Catlin [17] and Zelditch [48], Dai–Liu–Ma [20], Ma–Marinescu [35], with many other contributions.*
- (ii) *When (X, ω) is compact symplectic and P_p is the projection on the kernel of the spin^c -Dirac operator, the full off-diagonal expansion of the Bergman kernel P_p was established by Dai–Liu–Ma [20, Theorem 4.18]. The expansions of Ma–Marinescu and Kordyukov–Ma–Marinescu for the generalized Bergman kernel in the noncompact case are of the same nature.*

2.3.1 Off-diagonal asymptotics of the generalized Bergman kernel. In [20, Theorem 5], Dai–Liu–Ma established a full off-diagonal expansion for the Bergman kernel of the spin^c -Dirac operator. In [35, Theorem 1.19], Ma–Marinescu obtained an expansion for the generalized Bergman kernel in a neighborhood of size $\varepsilon/\sqrt{p}$ of the diagonal, called near off-diagonal expansion. This result has been improved by Kordyukov–Ma–Marinescu in [28, Theorem 4.3] to an off-diagonal expansion similar to the one of Dai–Liu–Ma. We recall the result of Kordyukov–Ma–Marinescu in this paragraph.

Let $x_0 \in X$, $\varepsilon < \text{inj}^X$ and $B^X(x_0, \varepsilon)$ be a normal coordinate ball centered at x_0 of radius ε . We identify elements of $B^X(x_0, \varepsilon)$ and $B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$ by the diffeomorphism given by the exponential map $\exp_{x_0}^X : B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon) \rightarrow B^X(x_0, \varepsilon)$. In the rest of the paper we denote $\varphi_{x_0}(Z) := \exp_{x_0}^X(Z)$. For $Z \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$, the fibers E_Z , L_Z , $T_Z X$ and their duals, tensor products and exterior products are identified to E_{x_0} , L_{x_0} and $T_{x_0} X$ by parallel transport along the curve $[0, 1] \ni t \mapsto tZ$ for the connections ∇^E , ∇^L and ∇^{TX} and the connections they induce. Under this identification there exists a function κ_{x_0} such that the localized volume form dv_{X_0} verifies

$$dv_{X_0}(Z) = \kappa_{x_0}(Z) dv_{T_{x_0}X}(Z), \quad \text{with } \kappa_{x_0}(0) = 1, \quad (2.66)$$

and where $dv_{T_{x_0}X}(Z)$ denotes the Riemannian volume form of $(T_{x_0}X, g^{T_{x_0}X})$. Still under this identification, the localized Bergman kernel $P_{p, x_0}(Z, Z')$ becomes a smooth function

mapping $Z, Z' \in B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$ to an element of $(L^p \otimes E)_{x_0} \otimes (L^p \otimes E)_{x_0}^* \simeq \mathbb{C} \otimes \text{End}(E)_{x_0}$. Let $\mathcal{J}_{x_0}$ be the endomorphism

$$\mathcal{J}_{x_0} = -2\pi\sqrt{-1}J_0(x_0), \quad (2.67)$$

then $\mathcal{J}_{x_0} : T_{x_0}^{(1,0)}X \rightarrow T_{x_0}^{(1,0)}X$ is positive and $\mathcal{J}_{x_0} : T_{x_0}X \rightarrow T_{x_0}X$ is skew-adjoint. Let $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{x_0} \in \mathcal{C}^\infty(T_{x_0}X \times T_{x_0}X)$ be the kernel defined by

$$\mathcal{P}_{x_0}(Z, Z') := \frac{\det_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{x_0}}{(2\pi)^n} \exp\left(-\frac{1}{4} \langle (\mathcal{J}_{x_0}^2)^{1/2}(Z - Z'), (Z - Z') \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_{x_0} Z, Z' \rangle\right). \quad (2.68)$$

It corresponds to the Bergman kernel of the operator $\mathcal{L}$ on $\mathbb{C}^n$. By [28, Theorem 4.3], we have the following off-diagonal expansion for the generalized Bergman kernel, as an analogue of [20, Theorem 4.18].

Theorem 2.15 ([28, Theorem 4.3]). *There exists $\varepsilon \in]0, \text{inj}^X[$ such that for any $j, l, l' \in \mathbb{N}$, there exist $C, c_0, M > 0$ such that for any $p \geq 1, x_0 \in X$ and $Z, Z' \in T_{x_0}X, |Z|, |Z'| < \varepsilon$ we have*

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha|+|\alpha'| \leq l} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} \left(p^{-n} P_{p,x_0}(Z, Z') - \sum_{r=0}^j \mathcal{F}_{r,x_0}(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z') \kappa_{x_0}^{-1/2}(Z) \kappa_{x_0}^{-1/2}(Z') p^{-r/2} \right) \right|_{\mathcal{C}^{l'}(X)} \\ \leq Cp^{-\frac{j-l+1}{2}} (1 + \sqrt{p}|Z| + \sqrt{p}|Z'|)^M \exp(-\sqrt{\mu_0 p}|Z - Z'|) + \mathcal{O}(e^{-c_0\sqrt{p}}), \end{aligned} \quad (2.69)$$

with $|\cdot|_{\mathcal{C}^{l'}(X)}$ the $\mathcal{C}^{l'}$ norm for the parameter $x_0 \in X$,

$$\mathcal{F}_{r,x_0}(Z, Z') := J_{r,x_0}(Z, Z') \mathcal{P}_{x_0}(Z, Z'), \quad J_{0,x_0}(Z, Z') = \text{Id}_{E_{x_0}}, \quad (2.70)$$

the terms $J_{r,x_0}(Z, Z')$ are $\text{End}(E)_{x_0}$ -valued polynomials in Z, Z' with the same parity as r , and verify $\deg J_{r,x_0}(Z, Z') \leq 3r$, their coefficients are polynomials in R^{TX}, R^E, R^L and their derivatives of order $\leq r-2$ at x_0 and reciprocals of linear combinations of eigenvalues of $\mathcal{J}_{x_0}$.

2.3.2 Generalized Bergman kernel in Fermi coordinates. In this paragraph we adapt the proofs of Finski in [22, §5.2] and give in (2.87) the expression of the generalized Bergman kernel in Fermi coordinates in terms of its expression in normal coordinates and of the diffeomorphism between normal and Fermi coordinates. The difference in our case stems from the fact that the horizontal bundle and the normal bundle are odd-dimensional.

We start by introducing some notations. Let $W \subseteq X$ be a compact domain of X with boundary $V = \partial W$. Since W is compact, V is also compact and the injectivity radius

CHAPTER 2

inj^V of V is positive. We have a splitting of the tangent bundle $TX|_V = TV \oplus N$ i.e.,

$$T_y X = T_y V \oplus N_y, \quad y \in V, \quad (2.71)$$

where N_y is the orthogonal complement to $T_y V$ with respect to g_y^{TX} , and $N \rightarrow V$ identifies with the normal bundle to V . Let $e_n(y) \in N_y$ be the *inward pointing unit normal* at $y \in V$. By compactness of V there exists $\eta > 0$ such that for all $y \in V$, the geodesic $] - \eta, \eta[\ni u \mapsto \exp_y^X(u e_n(y))$ is well defined. This identifies $V \times] - \eta, \eta[$ to $\mathcal{U}_\eta$ a tubular neighborhood of V . For $s \in] - \eta/2, \eta/2[$, denote by V_s the hypersurface defined by

$$V_s := \{\exp_y^X(s e_n(y)) : y \in V\}, \quad (2.72)$$

in particular for $s > 0$, $V_s = \{y \in W : d(y, V) = s\}$. As in [16][§1.2], we extend the splitting (2.71) to $\mathcal{U}_\eta$ by

$$T_y X = T_y V_s \oplus N_{s,y}, \quad y \in V_s, \quad (2.73)$$

where $N_{s,y}$ denotes the normal bundle to V_s , such that we now have

$$TX|_{\mathcal{U}_\eta} = TV \oplus N \quad \text{with} \quad TV \rightarrow \mathcal{U}_\eta, \quad N \rightarrow \mathcal{U}_\eta, \quad (2.74)$$

and there exists a family of metrics g^{TV} such that

$$g^{TX}(y, x_m) = g^{TV}(y) + dx_m^2, \quad (y, x_m) \in V \times (-\eta, \eta). \quad (2.75)$$

Let $P^N : TX|_{\mathcal{U}_\eta} \rightarrow N$, $P^V : TX|_{\mathcal{U}_\eta} \rightarrow TV$ be the orthogonal projections induced by the above splitting and introduce the connections $\nabla^N := P^N \nabla^{TX}$, ∇^{TV} the Levi-Civita connection for g^{TV} and $\nabla^{sp} := \nabla^{TV} \oplus \nabla^N$ the split connection on $TX|_{\mathcal{U}_\eta}$ induced by ∇^{TV} and ∇^N and R^{sp} its curvature. The *second fundamental form* of V is defined by

$$A := \nabla^{TX} - \nabla^{sp} \in \Omega^1(\mathcal{U}_\eta, \text{End}(TX|_{\mathcal{U}_\eta})). \quad (2.76)$$

Denote by $B^X(x_0, \varepsilon) \subseteq X$ the normal coordinate ball in X centered at x_0 of radius $\varepsilon < \text{inj}^X$. If $x_0 \in V_s$ and $\varepsilon' < \text{inj}^V/2$, let $B^{V_s}(x_0, \varepsilon')$ be the normal coordinate ball in V_s centered at x_0 of radius ε' and $\exp_{x_0}^{V_s}$ the corresponding exponential map. Let $U_{\eta, \varepsilon'}(x_0) := B^{T_{x_0} V_s}(0, \varepsilon') \times] - \eta - s, \eta - s[$ and define ψ_{x_0} by

$$\begin{aligned} \psi_{x_0}(Y, x_m) &:= \Psi_s(\exp_{x_0}^{V_s} Y, x_m), \quad (Y, x_m) \in U_{\eta, \varepsilon'}(x_0), \quad \text{where} \\ \Psi_s : (y, x_m) &\in V_s \times] - \eta - s, \eta - s[\mapsto \exp_y^X(x_m e_n(y)) \in \mathcal{U}_\eta. \end{aligned} \quad (2.77)$$

The map ψ_{x_0} defines a diffeomorphism $\psi_{x_0} : U_{\eta, \varepsilon'}(x_0) \rightarrow \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon'}(x_0)$, where

$\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon'}(x_0) := \Psi_s(B^{V_s}(x_0, \varepsilon') \times]-\eta - s, \eta - s[)$ is a portion of the tubular neighborhood $\mathcal{U}_\eta$ containing x_0 . Let $h_s : U_{\eta,\varepsilon'}(x_0) \rightarrow B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon)$ be the map such that

$$\psi_{x_0}(Y, x_m) = \exp_{x_0}^X(h_s(Y, x_m)) = \varphi_{x_0}(h_s(Y, x_m)). \quad (2.78)$$

Then h_s is a diffeomorphism onto its image. We have the following diagram, where ι is the inclusion map :

$$\begin{array}{ccc} B^X(x_0, \varepsilon) & \xleftarrow{\varphi_{x_0}(Z)} & B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon) \\ \uparrow \iota & & \uparrow h_s(Y, x_m) \\ \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon'}(x_0) & \xleftarrow{\psi_{x_0}(Y, x_m)} & U_{\eta,\varepsilon'}(x_0) \end{array}$$

We picture the situation as follows.

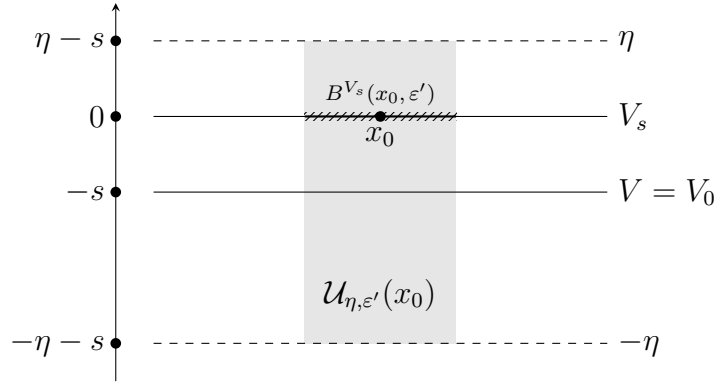


Figure 2.3 – In grey, the neighborhood $\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon'}(x_0)$.

We identify elements of $U_{\eta,\varepsilon'}(x_0)$ and $\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon'}(x_0)$ by the diffeomorphism ψ_{x_0} and for $(Y, x_m) \in U_{\eta,\varepsilon'}(x_0)$ the fibers $E_{h_s(Y, x_m)}$, $L_{h_s(Y, x_m)}$ and $T_{h_s(Y, x_m)}X$ to E_{x_0} , L_{x_0} and $T_{x_0}X$ by parallel transport along the curve

$$\delta(t) = \psi_{x_0}(tY, 0), \quad t \in [0, 1], \quad \delta(t) = \psi_{x_0}(Y, (t-1)x_m), \quad t \in [1, 2], \quad (2.79)$$

for the connections $\nabla^E, \nabla^L, \nabla^{TX}$. The same goes for tensor products, duals and exterior products of these vector bundles with respect to the naturally induced connections. Under this identification the Bergman kernel at $\psi_{x_0}(Y, x_m)$ and $\psi_{x_0}(Y', x'_m)$ becomes $P_{p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m))$ an element of $\text{End}(L^p \otimes E)_{x_0} \simeq \mathbb{C} \otimes \text{End}(E)_{x_0}$. This identification can be applied to any function in $\mathcal{C}^\infty(X \times X, F \otimes F^*)$ where F is a Hermitian vector bundle over X .

CHAPTER 2

Let (F, h^F) be a Hermitian vector bundle over X with Hermitian connection ∇^F . Let $x_0 \in V_s$ and f_i a Hermitian basis of F_{x_0} . Let $\tilde{f}_i$ be the basis of F_Z obtained by parallel transport along the curve $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto tZ$ for ∇^F and $\tilde{f}'_i$ the basis of $F_{h_s(Y, x_m)}$ obtained by parallel transport along δ for ∇^F . Let $\theta_s^F : B^{T_{x_0}X}(0, \varepsilon) \rightarrow M_{\text{rk } F}(\mathbb{C})$ be the matrix-valued function defined by

$$\tilde{f}_i(h_s(Y, x_m)) = \sum_{j=1}^{\text{rk } F} (\theta_s^F(h_s(Y, x_m)))_{ij} \tilde{f}'_j(Y, x_m). \quad (2.80)$$

If $(f_i)^*$ denotes the metric dual of f_i , and $(\tilde{f}_i)^*, (\tilde{f}'_i)^*$ are obtained by parallel transport of $(f_i)^*$ for the dual connection ∇^{F^*} on F^* respectively along γ, δ , then $(\tilde{f}_i)^*, (\tilde{f}'_i)^*$ are equal to the metric duals of $\tilde{f}_i$ and $\tilde{f}'_i$. This gives

$$(\tilde{f}_i)^*(h_s(Y, x_m)) = \sum_{j=1}^{\text{rk } F} (\overline{\theta_s^F}(h_s(Y, x_m)))_{ij} (\tilde{f}'_j)^*(Y, x_m), \quad (2.81)$$

therefore $\theta_s^{F^*}(h_s(Y', x'_m))_{ij} = \overline{\theta_s^F}(h_s(Y', x'_m))_{ij}$. We have the following

Lemma 2.16. *Let $G \in \mathcal{C}^\infty(X \times X, F \otimes F^*)$, $s \in]-\eta/2, \eta/2[$. Denote by $G_{x_0}(Z, Z')$ the localized kernel at $x_0 \in V_s$ obtained by parallel transport along γ as above, and $G_{x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m))$ the localized kernel in Fermi coordinates obtained by parallel transport along δ as above. For $x_m, x'_m \in]-\eta - s, \eta - s[$ and $|Y|, |Y'| < \varepsilon$, we have*

$$G_{x_0}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) = (\theta_s^F)^T(h_s(Y, x_m)) G_{x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) \overline{\theta_s^F}(h_s(Y', x'_m)). \quad (2.82)$$

Proof. Let us write

$$G_{x_0}(Z, Z') = \sum_{i,j} c_{ij}(Z, Z') \tilde{f}_i(Z) \otimes \tilde{f}'_j(Z'), \quad (2.83)$$

By linearity of the parallel transport maps along γ and δ for ∇^F we have

$$G_{x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) = \sum_{i,j} c_{ij}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) \tilde{f}'_i(Y, x_m) \otimes (\tilde{f}'_j)^*(Y', x'_m). \quad (2.84)$$

From (2.83) we get

$$\begin{aligned} G_{x_0}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) \\ = \sum_{i_1, j_1} c_{i_1 j_1}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) \tilde{f}_{i_1}(h_s(Y, x_m)) \otimes \tilde{f}_{j_1}^*(h_s(Y', x'_m)). \end{aligned} \quad (2.85)$$

By (2.80) and (2.81), the equation (2.85) becomes

$$G_{x_0}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) = \sum_{i_1, j_1, k_1, k_2} (\theta_s^F)^T(h_s(Y, x_m))_{k_1 i_1} c_{i_1 j_1}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) \overline{\theta_s^F}(h_s(Y', x'_m))_{j_2 k_2} \tilde{f}'_{k_1}(Y, x_m) \otimes (\tilde{f}'_{k_2})^*(Y', x'_m). \quad (2.86)$$

By (2.84), this gives (2.82). $\square$

By applying the above to P_{p, x_0} for $F = L^p \otimes E$ we get

$$P_{p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) = \left((\theta_s^{L^p \otimes E})^T \right)^{-1} (h_s(Y, x_m)) P_{p, x_0}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) \left(\overline{\theta_s^{L^p \otimes E}} \right)^{-1} (h_s(Y', x'_m)). \quad (2.87)$$

Here and in the rest of the paper we will write $P_{p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m))$ for the *Bergman kernel expressed in the coordinates* $((Y, x_m), (Y', x'_m))$.

2.3.3 Asymptotics of the diffeomorphism between Fermi and normal coordinates. In [22, §2.2], Finski proves an asymptotic expansion of order 2 for the diffeomorphism h_s in the case of a complex submanifold of a complex manifold X . His method is inspired by an article of Gavrilov [24]. In what follows we adapt his proof to our case and state the result in Theorem 2.20. Consider a k -tensor $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X, (T^*X)^{\otimes k})$. Recall that the operator ∇^{TX} acts on α by the formula,

$$(\nabla^{TX} \alpha)(X_1, \dots, X_{k+1}) = X_1 \alpha(X_2, \dots, X_{k+1}) - \sum_{i=2}^{k+1} \alpha(X_2, \dots, \nabla_{X_1}^{TX} X_i, \dots, X_{k+1}), \quad (2.88)$$

with $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{C}^\infty(X, TX)$. This defines an operator $(\nabla^{TX})^{\otimes k} := \nabla^{TX} \circ \dots \circ \nabla^{TX} : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, (T^*X)^{\otimes k})$. As in [22], the following lemma comes from (2.88).

Lemma 2.17 ([22, Lemma 2.6], [24, §2]). *Let $\gamma(t)$ be a geodesic in X and $v := \gamma'(t)$. Then for any $k \in \mathbb{N}$, the following identity holds*

$$v^{\otimes k} \cdot (\nabla^{TX})^{\otimes k} = \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^k. \quad (2.89)$$

Corollary 2.18 ([22, Corollary 2.7], [24, §2]). *Let $u \in \mathcal{C}^\infty(X)$, then u has the formal Taylor expansion at $x_0 \in X$,*

$$u(\exp_{x_0}^X(Z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Z^{\otimes k} \cdot (\nabla^{TX})^k u)(x_0), \quad (2.90)$$

where $Z \in T_{x_0} X$.

CHAPTER 2

From (2.78) and (2.90), for $x_0 \in V_s$ we have the expansion

$$u(\psi_{x_0}(Y, x_m)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(h_s(Y, x_m)^{\otimes k} \cdot (\nabla^{TX})^k u \right) (x_0). \quad (2.91)$$

Let $y = \exp_{x_0}^{V_s}(Y)$, $|Y| < \varepsilon'$. By Taylor expansion in x_m around $x_m = 0$ we have

$$u(\psi_{x_0}(Y, x_m)) = u \left(\exp_y^X(x_m e_n(y)) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left((x_m e_n(y))^{\otimes k} \cdot (\nabla^{TX})^k u \right) (\psi(Y, 0)). \quad (2.92)$$

Again as in [22], expanding the terms of the sum in (2.92) along the Y component we get

$$\begin{aligned} & \left((x_m e_n(y))^{\otimes k} \cdot (\nabla^{TX})^k u \right) (\psi(Y, 0)) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} Y^{\otimes l} \cdot (\nabla^{TV})^{\otimes l} \left((x_m e_n(y))^{\otimes k} \cdot (\nabla^{TX})^{\otimes k} u \right) (x_0). \end{aligned} \quad (2.93)$$

The following lemma is a weaker version of [22, Lemma 2.8].

Lemma 2.19. *For $s \in]-\eta/2, \eta/2[$, $x_0 \in V_s$, let $Y \in B^{T_{x_0} V_s}(0, \varepsilon')$, let $y(t)$ be the geodesic $y(t) = \exp_{x_0}^{V_s}(tY)$, for $|t| < 1$, and write $Y(t) = y'(t)$. Let $x_m \in]-\eta - s, \eta - s[$. We have*

$$\begin{aligned} & Y^{\otimes l} \cdot (\nabla^{TV})^{\otimes l} \left((x_m e_n(y))^{\otimes k} \cdot (\nabla^{TX})^{\otimes k} u \right) (x_0) \\ &= \left((Y^{\otimes l} \otimes (x_m e_n(x_0))^{\otimes k}) \cdot (\nabla^{sp})^{\otimes l} (\nabla^{TX})^{\otimes k} u \right) (x_0). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Proof. By the geodesic equation, and by construction of ∇^N and ∇^{sp} , we have

$$\nabla_Y^{TV} Y = 0, \quad \nabla_Y^N e_n = 0, \quad \nabla_Y^{sp} e_n = 0, \quad \text{and} \quad \nabla_{e_n}^{TX} e_n = 0. \quad (2.95)$$

As in [22, Lemma 2.8], (2.94) is a consequence of (2.88) and (2.95). $\square$

From (2.93) and the above lemma, we get another asymptotic formula for $u(\psi_{x_0}(Y, x_m))$

$$\begin{aligned} & u(\psi_{x_0}(Y, x_m)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!l!} \left((Y^{\otimes l} \otimes (x_m e_n(x_0))^{\otimes k}) \cdot (\nabla^{sp})^{\otimes l} (\nabla^{TX})^{\otimes k} u \right) (x_0). \end{aligned} \quad (2.96)$$

We can decompose h_s as

$$h_s(Y, x_m) = \sum_{r=1}^{\infty} h_s^{[r]}(Y, x_m), \quad (2.97)$$

where $h_s^{[r]}(Y, x_m)$ is a homogenous polynomial corresponding to the term of degree r in Y, x_m in the asymptotic expansion of h_s . By identifying the terms of (2.90) and (2.96),

in the same way as [22] we obtain the following result.

Theorem 2.20. *The first two terms in the expansion of h verify*

$$h_s^{[1]}(Y, x_m) = Y + x_m e_n(x_0). \quad (2.98)$$

$$h_s^{[2]}(Y, x_m) = \frac{1}{2} A_{x_0}(Y)Y + x_m A_{x_0}(Y)(e_n(x_0)). \quad (2.99)$$

Proof. The proof for $h_s^{[1]}(Y, x_m)$ is straightforward. For $h_s^{[2]}(Y, x_m)$ we proceed as follows. Combining (2.90) and (2.96) we get

$$\begin{aligned} \left[\left(h_s^{[2]}(Y, x_m) \cdot \nabla^{TX} + \frac{1}{2} h_s^{[1]}(Y, x_m)^{\otimes 2} \cdot (\nabla^{TX})^{\otimes 2} \right) u \right] (x_0) &= \left[\left(\frac{1}{2} Y^{\otimes 2} \cdot (\nabla^{sp})^{\otimes 2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Y \otimes (x_m e_n(y)) \cdot \nabla^{sp} \otimes \nabla^{TX} + \frac{1}{2} (x_m e_n(y))^{\otimes 2} \cdot (\nabla^{TX})^{\otimes 2} \right) u \right] (x_0). \end{aligned} \quad (2.100)$$

By (2.88), we have for $Y_1, Y_2 \in TV$,

$$\begin{aligned} Y_1 \otimes Y_2 \cdot \nabla^{sp} \otimes \nabla^{TX} u &= Y_1(\nabla_{Y_2}^{TX} u) - \nabla_{\nabla_{Y_1}^{sp} Y_2}^{TX} u \\ &= Y_1(Y_2 u) - \nabla_{Y_1}^{sp} Y_2 u \\ &= Y_1 \otimes Y_2 \cdot (\nabla^{TX})^{\otimes 2} u + A(Y_1)Y_2 u. \end{aligned} \quad (2.101)$$

The same computation gives

$$Y_1 \otimes Y_2 \cdot (\nabla^{sp})^{\otimes 2} u = Y_1 \otimes Y_2 \cdot (\nabla^{TX})^{\otimes 2} u + A(Y_1)Y_2 u. \quad (2.102)$$

We obtain the equality (2.99) by (2.98) and (2.100). $\square$

2.3.4 Generalized Bergman kernel asymptotics in Fermi coordinates. In this paragraph we combine the asymptotics of Theorems 2.15, 2.20 to obtain the off-diagonal expansion of the Bergman kernel in Fermi coordinates stated in Corollary 2.21.

Recall that the map $\mathcal{J}_{x_0}$ was defined in (2.67) by $\mathcal{J}_{x_0} = -2\pi\sqrt{-1}J_0(x_0)$, with J_0 the correspondence between the symplectic form and the Riemannian metric as in (2.2). In the rest of the paper, we will decompose $\mathcal{J}_{x_0}$ for $x_0 \in V_s$ as follows. Let J_{x_0} denote the endomorphism induced by the complex structure J acting on $T_{x_0}X$ and $H_{x_0}V_s := T_{x_0}V_s \cap J_{x_0}T_{x_0}V_s$. Then $T_{x_0}X$ decomposes as the orthogonal direct sum

$$T_{x_0}X = H_{x_0}V_s \oplus \text{Span}_{\mathbb{R}}(J_{x_0}e_n(x_0), e_n(x_0)), \quad (2.103)$$

where $J_{x_0}e_n(x_0), e_n(x_0)$ are orthogonal and unitary. The space $H_{x_0}V$ is stable by J hence

CHAPTER 2

by J_0 , and we can write J_0 matrixwise as

$$(J_0)_{x_0} = \begin{pmatrix} J_0|_{H_{x_0}V_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{x_0} \\ 0 & \alpha_{x_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.104)$$

with $\alpha_{x_0} := \omega(e_n, J e_n)(x_0) > 0$, and we have

$$\mathcal{J}_{x_0} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{x_0}|_{H_{x_0}V_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i\pi\alpha_{x_0} \\ 0 & -2i\pi\alpha_{x_0} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{J}_{x_0}^2)^{1/2} = \begin{pmatrix} (\mathcal{J}_{x_0}^2)^{1/2}|_{H_{x_0}V_s} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi\alpha_{x_0} & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi\alpha_{x_0} \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

For $Y \in T_{x_0}V$ and $x_m \in \mathbb{R}$ we define

$$z_m := x_{m-1} + ix_m \in \mathbb{C}, \quad \text{where } Y = Y_H + x_{m-1}J e_n(x_0), \quad (2.106)$$

with $x_{m-1} \in \mathbb{R}, Y_H \in H_{x_0}V_s$ and $|Y|^2 = |Y_H|^2 + x_{m-1}^2$.

Let us introduce $\mathcal{P}_{x_0}^H$ the horizontal kernel, defined for $Y_H, Y'_H \in H_{x_0}V$ by

$$\mathcal{P}_{x_0}^H(Y_H, Y'_H) := \frac{\det_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{x_0}|_{HV}}{(2\pi)^{n-1}} \exp \left(-\frac{1}{4} \langle (\mathcal{J}_{x_0}|_{HV}^2)^{1/2} (Y_H - Y'_H), (Y_H - Y'_H) \rangle \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_{x_0}|_{HV} Y_H, Y'_H \rangle \right), \quad (2.107)$$

such that $\mathcal{P}_{x_0}$ defined in (2.68) verifies, by (2.105),

$$\mathcal{P}_{x_0}(Y + x_m e_n(x_0), Y' + x'_m e_n(x_0)) = \mathcal{P}_{x_0}^H(Y_H, Y'_H) P_{\alpha_{x_0}}(z_m, z'_m). \quad (2.108)$$

We recall that in the above $P_{\alpha_{x_0}}$ corresponds to the Bergman kernel on the complex plane as in Section 2.2.

Let dv_{TV} be the volume form on $(T_{x_0}V_s, g^{T_{x_0}V_s})$ and $\kappa_{x_0}^V$ the smooth positive function such that if dv'_{x_0} denotes the form on $T_{x_0}X$ in Fermi coordinates obtained by the identification along the path (2.79), we have for $(Y, x_m) \in U_{\eta, \varepsilon}(x_0)$

$$dv'_{x_0}(Y, x_m) = \kappa_{V, x_0}(Y, x_m) dv_{TV}(Y) dx_m, \quad \text{with } \kappa_{V, x_0}(0, 0) = 1. \quad (2.109)$$

As a Corollary of Theorem 2.15, we get the following off-diagonal expansion for the Bergman kernel in Fermi coordinates. For $Z = (Y, x_m)$ and $\alpha = (\beta, j)$, we write $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial Z^\alpha}$ for $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial Y^\beta} \frac{\partial^j}{\partial x_m^j}$.

Corollary 2.21. *Let $x_0 \in U_\eta$ and $s \in]-\eta/2, \eta/2[$ such that $x_0 \in V_s$. There exist $\text{End}(E)_{x_0}$ -valued polynomials J'_{r,x_0} in Y, x_m, Y' and x'_m such that for $|Y|, |Y'| < \varepsilon$, $x_m, x'_m \in]-\eta - s, \eta - s[$, we have the expansion*

$$\begin{aligned} & \sup_{|\alpha|+|\alpha'|\leq l} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial Z^\alpha \partial Z'^{\alpha'}} \left(\frac{1}{p^n} P_{p,x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sum_{r=0}^k p^{-r/2} \mathcal{F}'_{r,x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m) \kappa_{V,x_0}^{-1/2}(Y, x_m) \kappa_{V,x_0}^{-1/2}(Y', x'_m) \right) \right|_{\mathcal{C}^{l'}(X)} \\ & \leq C p^{\frac{k-l+1}{2}} (1 + \sqrt{p}|(Y, x_m)| + \sqrt{p}|(Y', x'_m)|)^M \\ & \quad \times \exp(-c\sqrt{\mu_0 p}|(Y - Y', x_m - x'_m)|) + \mathcal{O}(e^{-c_0\sqrt{p}}), \quad (2.110) \end{aligned}$$

with

$$\mathcal{F}'_{r,x_0}(Y, x_m, Y', x'_m) := J'_{r,x_0}(Y, x_m, Y', x'_m) \mathcal{P}_{x_0}^H(Y_H, Y'_H) P_{\alpha_{x_0}}(z_m, z'_m), \quad (2.111)$$

where $z_m = x_{m-1} + ix_m$, $Y = Y^H + x_{m-1} J e_n(x_0)$, $Y^H \in H_{x_0} V$ and the first term equals

$$J'_{0,x_0} = \text{Id}_{E_{x_0}}. \quad (2.112)$$

As in Theorem 2.15, the above expansion holds uniformly in $\mathcal{C}^{l'}$ -norm taken on $x \in \mathcal{U}_\eta$ for $l' \in \mathbb{N}$.

Proof. The method for the proof is adapted from [22, Proposition 5.4]. Let $x_0 \in V_s$, we have

$$\mathcal{P}_{x_0}(p^{1/2}h_s(Y, x_m), p^{1/2}h_s(Y', x'_m)) = \frac{\det_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{x_0}}{(2\pi)^n} \exp(-pf_s(Y, x_m, Y', x'_m)). \quad (2.113)$$

The map f_s is defined by

$$\begin{aligned} f_s(Y, x_m, Y', x'_m) &= \frac{1}{4} \left\langle (\mathcal{J}_{x_0}^2)^{1/2}(h_s(Y, x_m) - h_s(Y', x'_m)), h_s(Y, x_m) - h_s(Y', x'_m) \right\rangle \\ & \quad - \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_{x_0} h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m) \rangle. \quad (2.114) \end{aligned}$$

By Theorem 2.20 and the expansion (2.97), we write f_s as

$$\begin{aligned} f_s(Y, x_m, Y', x'_m) &= \frac{1}{4} \left\langle (\mathcal{J}_{x_0}^2)^{1/2}(Y - Y'), Y - Y' \right\rangle + \frac{\pi \alpha_{x_0}}{2} (x'_m - x_m)^2 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_{x_0} Y, Y' \rangle \\ & \quad + \frac{1}{2} x_m \langle \mathcal{J}_{x_0} e_n(x_0), Y' \rangle - \frac{1}{2} x'_m \langle \mathcal{J}_{x_0} e_n(x_0), Y \rangle + g_s(Y, x_m, Y', x'_m), \quad (2.115) \end{aligned}$$

CHAPTER 2

where g_s is the remainder of the expansion of f_s in Y, Y', x_m, x'_m and is therefore of order at least 3 in Y, x_m, Y', x'_m . Then by (2.108), (2.113) becomes

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{x_0}(p^{1/2}h_s(Y, x_m), p^{1/2}h_s(Y', x'_m)) \\ &= \mathcal{P}_{x_0}^H(p^{1/2}Y_H, p^{1/2}Y'_H)P_{\alpha_{x_0}}(p^{1/2}z_m, p^{1/2}z'_m)\exp(-pg_s(Y, x_m, Y', x'_m)). \end{aligned} \quad (2.116)$$

We use the same trick as [34, (7.2.19)], and write the Taylor expansion of pg as follows

$$pg_s(Y, Y', x_m, x'_m) = \sum_{i \geq 3} p^{(2-i)/2} g_s^{[i]}(p^{1/2}Y, p^{1/2}Y', p^{1/2}x_m, p^{1/2}x'_m), \quad (2.117)$$

with $g_s^{[i]}$ the term of order i in the Taylor expansion of g_s . Combining with the exponential series expansion

$$\exp(-pg_s) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} (pg_s)^k, \quad (2.118)$$

we get that there exist polynomials Q_{i,x_0} such that

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{x_0}(p^{1/2}h_s(Y, x_m), p^{1/2}h_s(Y', x'_m)) \\ &= \sum_{i \geq 0} p^{n-i/2} Q_{i,x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m) \mathcal{P}_{x_0}^H(p^{1/2}Y_H, p^{1/2}Y'_H) P_{\alpha_{x_0}}(p^{1/2}z_m, p^{1/2}z'_m) \\ & \quad + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \end{aligned} \quad (2.119)$$

In the above $Q_{0,x_0} = \text{Id}_{E_{x_0}}$. By Theorem 2.15 we have

$$\begin{aligned} & P_{p,x_0}(h_s(Y, x_m), h_s(Y', x'_m)) \\ &= \sum_{r \geq 0} p^{n-r/2} J_{r,x_0}(p^{1/2}h_s(Y, x_m), p^{1/2}h_s(Y', x'_m)) \mathcal{P}_{x_0}(p^{1/2}h_s(Y, x_m), p^{1/2}h_s(Y', x'_m)) \\ & \quad \kappa_{x_0}^{-1/2}(h_s(Y, x_m)) \kappa_{x_0}^{-1/2}(h_s(Y', x'_m)) + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Again we write the expansion of $p^{1/2}h_s$ as

$$p^{1/2}h_s(Y, x_m) = \sum_{i \geq 1} p^{(1-i)/2} h_s^{[i]}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m), \quad (2.121)$$

and we apply to (2.120) the same method as before and write the asymptotics of $\kappa_{x_0}^{-1/2}(h_s(Y, x_m))$ and $\kappa_{x_0}^{-1/2}(h_s(Y', x'_m))$ in the same way as for g_s and h_s and combine with (2.119).

We then use (2.87), and proceed again with the asymptotics of $\theta_s^{L^p \otimes E}(Y, x_m)$ in the same way. After the above steps the asymptotics we obtain remain of the same form as (2.119), only the polynomials change and we obtain (2.110). To compute the first

term we use $Q_{0,x_0} = \text{Id}_{E_{x_0}}$ and the first order expansions $\kappa_{x_0}(h_s(Y, x_m))\kappa_{V,x_0}^{-1}(Y, x_m) = 1 + p^{-1/2}\mathcal{O}(|p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m|)$ and $\theta_s^{L^p \otimes E}(Y, x_m) = \text{Id} + p^{-1/2}\mathcal{O}(|p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m|)$ and get (2.112). The fact that h_s is a diffeomorphism ensures that $|h_s(Y, x_m)|$ is controlled by $|(Y, x_m)|$. $\square$

2.4 Asymptotics for the Toeplitz operator $T_{W,p}$

This section is organized as follows. In Sect. 2.4.1, thanks to the appropriate choice of coordinates in (2.103), (2.104), (2.105) and in the Bergman kernel expansion in Fermi coordinates (2.110), we obtain the full off-diagonal kernel expansion for $T_{W,p}$ by reducing the problem to the case of Section 2.2. This expansion is stated in Theorem 2.24 and combined with the estimates of Lemma 2.23 it implies Theorem 2.1. In Sect. 2.4.2 we prove Theorem 2.3 by applying similar techniques. In Sect. 2.4.3 we prove the trace asymptotics of Corollary 2.4, then we deduce Corollary 2.5 from Corollary 2.4. In Sect. 2.4.4 we prove the technical result stated in Lemma 2.25.

2.4.1 Kernel asymptotics for $T_{W,p}$ and proof of Theorem 2.1. For $x, y \in X$, by definition of $T_{W,p}$ we have

$$T_{W,p}(x, y) = \int_W P_p(x, z)P_p(z, y)dv_X(z). \quad (2.122)$$

For $s \in]-\eta/2, \eta/2[$ and $x_0 \in V_s$, we introduce the following subsets of $U_{\eta,\varepsilon}(x_0)$ and $\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}(x_0)$

$$U_{\eta,\varepsilon}^-(x_0) = B^{T_{x_0}V_s}(0, \varepsilon) \times]-\eta - s, -s[, \quad U_{\eta,\varepsilon}^+(x_0) = B^{T_{x_0}V_s}(0, \varepsilon) \times]-s, \eta - s[, \quad (2.123)$$

$$\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0) = \psi_{x_0}(U_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)), \quad \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0) = \psi_{x_0}(U_{\eta,\varepsilon}^+(x_0)). \quad (2.124)$$

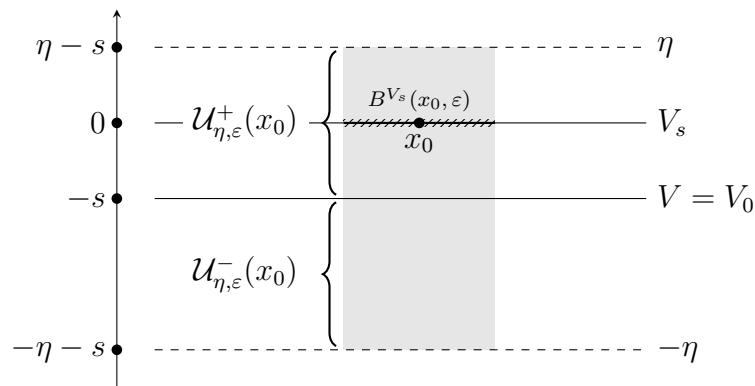


Figure 2.4 – The neighborhoods $\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0)$ and $\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)$, in the case $s \in [0, \eta/2]$.

Note that although the definition of $\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)$ and $\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0)$ suggests they might depend on s , it is not the case (see figure 2.4). By [22, Corollary 3.2], the lemma we state below holds, as a consequence of the Bishop–Gromov inequality.

CHAPTER 2

Lemma 2.22 ([22, Corollary 3.2]). *Assume that there exists $s > 0$ such that the Ricci curvature of (X, g^{TX}) satisfies the lower bound*

$$\text{Ric}_{g^{TX}} \geq -(m-1)s, \quad (2.125)$$

where m is the dimension of X . Then there exists a constant $C' > 0$ which depends only on n, s, r_X such that for any $x_0 \in X$, $k > 2(m-1)\sqrt{s}$, we have

$$\int_X \exp(-kd(x_0, x)) dv_X(x) < \frac{C'}{k^m}. \quad (2.126)$$

The following results come from the exponential estimates (2.7) combined with the inequality (2.126).

Lemma 2.23. *Using the notations above there exist $p_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$, such that for $l \in \mathbb{N}$ there exist $C_{l,W}, C'_{l,W}, C''_{l,W} > 0$ such that for $p \geq p_0$:*

(i) *If $x, x' \in X$,*

$$|T_{W,p}(x, x')|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, x')}. \quad (2.127)$$

(ii) *If $x \in W^c$,*

$$|T_{W,p}(x, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C'_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)}. \quad (2.128)$$

(iii) *If $x \in W \setminus V$,*

$$|T_{W,p}(x, x) - P_p(x, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C''_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)}. \quad (2.129)$$

(iv) *If $x \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^+(x_0)$ and $y \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)$ for some $x_0 \in V_s$,*

$$T_{W,p}(x, y) = P_p(x, y) - \int_{\mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^-(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z) + \mathcal{O}_{\mathcal{C}^l(X)}(p^{n+l/2} e^{-c\eta\sqrt{p}}). \quad (2.130)$$

(v) *If $x \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^-(x_0)$ and $y \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)$ for some $x_0 \in V_s$,*

$$T_{W,p}(x, y) = \int_{\mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^+(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z) + \mathcal{O}_{\mathcal{C}^l(X)}(p^{n+l/2} e^{-c\eta\sqrt{p}}). \quad (2.131)$$

In (iv) and (v) the terms $\mathcal{O}_{\mathcal{C}^l}(p^{n+l/2} e^{-c\eta\sqrt{p}})$ are to be understood in the same sense as the inequalities in (i), (ii), (iii).

Proof. Since (X, g^{TX}) is of bounded geometry, there exists $s > 0$ such that the Ricci curvature satisfies the lower bound

$$\text{Ric}_{g^{TX}} \geq -(2n-1)s, \quad (2.132)$$

therefore Lemma 2.22 holds and we will make extensive use of it.

- (i) If $x, x' \in X$, applying (2.7) in (2.122), and the triangle inequality to get $d(x, x'') + d(x'', x') \geq \frac{1}{2}d(x, x') + \frac{1}{2}d(x, x'')$, by Lemma 2.22 we get that there exists $C_{l,W}$ such that

$$|T_{W,p}(x, x')|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, x')} \text{vol}(W). \quad (2.133)$$

- (ii) If $x \in W^c \setminus U_\eta$, applying Lemma 2.22 and (2.7) in (2.122):

$$|T_{W,p}(x, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C_l^2 p^{2n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)} \int_W e^{-c\sqrt{p}d(x, z)} dv_X(z), \quad (2.134)$$

we can then apply (2.126) and get

$$|T_{W,p}(x, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} \leq C'_{l,W} p^{n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)} C_W, \quad (2.135)$$

in particular $T_{W,p}(x, x)$ has exponential decay in p .

- (iii) If $x \in W \setminus U_\eta$, by definition of $T_{f,p}$ and (2.7) we get

$$\begin{aligned} |T_{W,p}(x, x) - P_p(x, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} &\leq \int_{W^c} |P_p(x, z) P_p(z, x)|_{\mathcal{C}^l(X)} dv_X(z) \\ &\leq C_l^2 p^{2n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)} \int_{W^c} e^{-c\sqrt{p}d(x, z)} dv_X(z) \\ &\leq C_l^2 p^{2n+l/2} e^{-c\sqrt{p}d(x, V)} \int_{W^c} e^{-c\sqrt{p}d(V, z)} dv_X(z) \\ &\leq C''_{l,W} p^{n+l/2} e^{-2c\sqrt{p}d(x, V)}, \end{aligned} \quad (2.136)$$

where for the last inequality we applied Lemma 2.22 again. We conclude that $T_{W,p}(x, x)$ has the same asymptotics as the Bergman kernel up to exponentially decaying terms in p .

- (iv) If $x \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^+(x_0)$ and $y \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}$, we split the integral expressing $T_{W,p}(x, y)$ as

$$\begin{aligned} T_{W,p}(x, y) &= P_p(x, y) - \int_{\mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^-(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z) \\ &\quad - \int_{W^c \setminus \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z). \end{aligned} \quad (2.137)$$

CHAPTER 2

By (2.7) we have

$$\begin{aligned} \left| \int_{W^c \setminus \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z) \right|_{\mathcal{C}^l(X)} &\leq \int_{W^c \setminus \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)} |P_p(x, z) P_p(z, y)|_{\mathcal{C}^l(X)} dv_X(z) \\ &\leq C_l^2 p^{2n+l/2} e^{-c\eta\sqrt{p}} \int_{W^c \setminus \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)} e^{-c\sqrt{p}d(z, y)} dv_X(z) \leq C_l^2 p^{n+l/2} e^{-c\eta\sqrt{p}} C_W'. \end{aligned} \quad (2.138)$$

As before, we obtain the last inequality by applying Lemma 2.22.

(v) If $x \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^-(x_0)$, and $y \in \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)$, we write

$$T_{W, p}(x, y) = \int_{\mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}^+(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z) + \int_{W \setminus \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z), \quad (2.139)$$

applying again Lemma 2.22 and (2.7), we obtain

$$\begin{aligned} \left| \int_{W \setminus \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)} P_p(x, z) P_p(z, y) dv_X(z) \right|_{\mathcal{C}^l(X)} &\leq \int_{W \setminus \mathcal{U}_{\eta, \varepsilon}(x_0)} |P_p(x, z) P_p(z, y)|_{\mathcal{C}^l(X)} dv_X(z) \\ &\leq C_l^2 C_W' p^{n+l/2} e^{-c\eta\sqrt{p}}. \end{aligned} \quad (2.140)$$

This completes the proof of Lemma 2.23. $\square$

Theorem 2.24. *Let $x \in U_\eta$ and $s \in]-\eta/2, \eta/2[$ such that we can write $x = x_0 \in V_s$. With the notations of Corollary 2.21, there exist $\text{End}(E)_{x_0}$ -valued polynomials $\mathcal{Q}_{r, x_0}$ in Y, x_m, Y' and x'_m , such that for $|Y|, |Y'| < \varepsilon$, $x_m, x'_m \in]-\eta - s, \eta - s[$, we have the expansion,*

(i) *If $(Y, x_m) \in U_{\eta, \varepsilon}^+(x_0)$,*

$$\begin{aligned} &T_{W, p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) \\ &= P_{p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) - P_{p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) \text{erfc} \left(\sqrt{p\pi\alpha_{x_0}} \left(s + \frac{z_m - \bar{z}'_m}{2i} \right) \right) \\ &+ \sum_{r \geq 1} p^{n-r/2} \mathcal{Q}_{r, x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m, p^{1/2}s) \exp \left(-p\pi\alpha_{x_0} \left(s + \frac{z_m - \bar{z}'_m}{2i} \right)^2 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \end{aligned} \quad (2.141)$$

(ii) *If $(Y, x_m) \in U_{\eta, \varepsilon}^-(x_0)$,*

$$\begin{aligned} &T_{W, p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) = P_{p, x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) \text{erfc} \left(\sqrt{p\pi\alpha_{x_0}} \left(-s - \frac{z_m - \bar{z}'_m}{2i} \right) \right) \\ &+ \sum_{r \geq 1} p^{n-r/2} \mathcal{Q}_{r, x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m, p^{1/2}s) \exp \left(-p\pi\alpha_{x_0} \left(s + \frac{z_m - \bar{z}'_m}{2i} \right)^2 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \end{aligned} \quad (2.142)$$

In the above the quantity $\mathcal{Q}_{r,x_0}(Y, x_m, Y', x'_m)$ is defined by

$$\mathcal{Q}_{r,x_0}(Y, x_m, Y', x'_m) := Q_{r,x_0}(Y, x_m, Y', x'_m) \mathcal{P}_{x_0}(Y_H, Y'_H) P_{\alpha_{x_0}}(z_m, z'_m), \quad (2.143)$$

and $\alpha_{x_0} := \omega_{x_0}(e_n(x_0), J_{x_0} e_n(x_0))$. Notice that since from (2.33) we have $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erfc}(-z)$, the formulas (2.141) and (2.142) are actually the same.

Proof. We start by proving (ii). By (v) of Lemma 2.23 we have, for $(Y, x_m) \in U_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)$ and $(Y', x'_m) \in U_{\eta,\varepsilon}(x_0)$,

$$\begin{aligned} T_{W,p,x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) &= \int_{(Y'', x''_m) \in U_{\eta,\varepsilon}^+} P_{p,x_0}((Y, x_m), (Y'', x''_m)) P_{p,x_0}((Y'', x''_m), (Y', x'_m)) \\ &\quad \kappa_{V,x_0}(Y'', x''_m) dv_{TY}(Y'') dx''_m + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \end{aligned} \quad (2.144)$$

By the Bergman kernel asymptotics (2.110), $T_{W,p,x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m))$ admits the expansion

$$\begin{aligned} T_{W,p,x_0}((Y, x_m), (Y', x'_m)) &= \sum_{r,r' \geq 0} p^{2n-(r+r')/2} \kappa_{V,x_0}^{-1/2}(Y, x_m) \kappa_{V,x_0}^{-1/2}(Y', x'_m) \\ &\quad I_{r,r',x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m), \end{aligned} \quad (2.145)$$

where

$$\begin{aligned} I_{r,r',x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m) &:= \int_{(Y'', x''_m) \in U_{\eta,\varepsilon}^+} \mathcal{F}'_{r,x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y'', p^{1/2}x''_m) \\ &\quad \mathcal{F}'_{r',x_0}(p^{1/2}Y'', p^{1/2}x''_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m) dv_{TY}(Y'') dx''_m. \end{aligned} \quad (2.146)$$

By the exponential decay property of the Bergman kernel, up to a $\mathcal{O}(p^{-\infty})$ term the integral above is the same as the integral over $Y'' \in T_{x_0}V_s$ and $-s < x''_m < +\infty$, which corresponds to integrating over $Y''_H \in H_{x_0}V_s$ and $z''_m \in \mathbb{H}_{-s}$. After a change of variable in $p^{1/2}Y''_H, p^{1/2}z''_m$, we apply Corollary 2.9 where we replace α by α_{x_0} and s, z, z' by $-p^{1/2}s, p^{1/2}z_m, p^{1/2}z'_m$: there exist $Q_{r,r',x_0}, R_{r,r',x_0}$ polynomials such that

$$\begin{aligned} I_{r,r',x_0}(p^{1/2}Y, p^{1/2}x_m, p^{1/2}Y', p^{1/2}x'_m) &= p^{-n} R_{r,r',x_0}(p^{1/2}Y_H, p^{1/2}z_m, p^{1/2}Y'_H, p^{1/2}z'_m) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{p\pi\alpha_{x_0}} \left(-s - \frac{z_m - \bar{z}'_m}{2i} \right) \right) \\ &\quad + p^{-n} Q_{r,r',x_0}(p^{1/2}Y_H, p^{1/2}z_m, p^{1/2}Y'_H, p^{1/2}z'_m, p^{1/2}s) \exp \left(-p\pi\alpha_{x_0} \left(-s - \frac{z_m - \bar{z}'_m}{2i} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.147)$$

CHAPTER 2

By Corollary 2.9, the terms R_{r,r',x_0} correspond exactly to the terms in the asymptotics of the Bergman kernel and $Q_{0,0,x_0} = 0$. A similar computation starting from (iv) of Lemma 2.23 proves (i). $\square$

Proof of Theorem 2.1. Theorem 2.1 is a particular case of the results in Lemma 2.23 and Theorem 2.24. $\square$

2.4.2 Proof of Theorem 2.3. This paragraph contains the proof of Theorem 2.3.

Proof of (1). We start by proving (1) of Theorem 2.3. We begin with the case $g(X) = X^q - X^{q+1}$ and we introduce

$$\Pi_{p,q}(x_1, \dots, x_q) := P_p(x_1, x_2) \dots P_p(x_{q-1}, x_q) P_p(x_q, x_1). \quad (2.148)$$

We will use the same formula as [18, Lemma 5.1],

$$(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x, x) = \int_{W^q \times W^c} \Pi_{p,q+2}(x, x_1 \dots, x_{q+1}) dv_X(x_1) \dots dv_X(x_q). \quad (2.149)$$

Let $x \in X$, $x_1, \dots, x_q \in W$ and $x_{q+1} \in W^c$. By the triangle inequality and the exponential estimates (2.7) we have, on the one hand

$$|\Pi_{p,q+2}(x, x_1 \dots, x_{q+1})|_{\mathcal{C}^k(X^{q+2})} \leq C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p} \max_{1 \leq i \leq q+1} d(x, x_i)} e^{-c\sqrt{p} d(x, x_{q+1})}, \quad (2.150)$$

and on the other hand

$$|\Pi_{p,q+2}(x, x_1 \dots, x_{q+1})|_{\mathcal{C}^k(X^{q+2})} \leq C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p} \max_{1 \leq i \leq q+1} d(x, x_i)} e^{-c\sqrt{p} d(x, x_1)}. \quad (2.151)$$

If $x \in W^c$, $d(x, x_1) > d(x, V)$ and if $x \in W \setminus V$, $d(x, x_{q+1}) > d(x, V)$. From the above inequalities we get

$$|\Pi_{p,q+2}(x, x_1 \dots, x_{q+1})|_{\mathcal{C}^k(X^{q+2})} \leq C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p} \max_{1 \leq i \leq q+1} d(x, x_i)} e^{-c\sqrt{p} d(x, V)}. \quad (2.152)$$

Applying (2.152) and the inequality $\max_{1 \leq i \leq q+1} d(x_0, x_i) \geq \frac{1}{q+1} (d(x_0, x_1) + d(x_0, x_2) + \dots + d(x_0, x_{q+1}))$ we obtain

$$\begin{aligned} & \left| (T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x, x) \right|_{\mathcal{C}^k(X)} \\ & \leq C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p} d(x, V)} \left(\int_W e^{-\frac{c\sqrt{p}}{q+1} d(x, x_1)} dv_X(x_1) \right)^q \left(\int_{W^c} e^{-\frac{c\sqrt{p}}{q+1} d(x, x_{q+1})} dv_X(x_{q+1}) \right). \end{aligned} \quad (2.153)$$

By the Bishop–Gromov inequality (2.126) we get that there exists $C_{k,q,n} > 0$ such that

$$\left| (T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x, x) \right|_{\mathcal{C}^k(X)} \leq C_{k,q,n} p^{n+k/2} e^{-c\sqrt{p}d(x,V)}. \quad (2.154)$$

Point (1) of Theorem 2.3 is a consequence of the above inequality by writing any polynomial vanishing at 0 and 1 as a linear combination of $\{X^q - X^{q+1}\}_{q \geq 1}$. $\square$

Proof of (2). Let us now prove point (2) of Theorem 2.3.

Proof of (2.19). Let $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Recall the quantity $\Pi_{p,q+2}$ was defined in (2.148). To compute the kernel of the operator $T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1}$ we will use again the formula (2.149). By the triangle inequality and the exponential estimates (2.7), we get

$$|\Pi_{p,q+2}(x, x_1, \dots, x_{q+1})|_{\mathcal{C}^k(X^{q+2})} \leq C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p} \max_{1 \leq i \leq q+1} d(x, x_i)} e^{-c\sqrt{p}d(x_q, x_{q+1})}, \quad (2.155)$$

which we can write as, for $x_1, \dots, x_q \in W$, $x_{q+1} \in W^c$,

$$|\Pi_{p,q+2}(x, x_1, \dots, x_{q+1})|_{\mathcal{C}^k(X^{q+2})} \leq C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p} \max_{1 \leq i \leq q+1} d(x, x_i)} e^{-c\sqrt{p}d(x_{q+1}, W)}. \quad (2.156)$$

Let $s \in]-\eta/2, \eta/2[$ and $x_0 \in V_s$ such that $x_0 = \exp_{y_0}^X(se_n(y_0))$ for some $y_0 \in V$. By (2.149) we have

$$\begin{aligned} & \left| (T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x_0, x_0) \right. \\ & \quad \left. - \int_{(\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0))^q \times \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)} \Pi_{p,q+2}(x_0, x_1, \dots, x_{q+1}) dv_X(x_1) \dots dv_X(x_{q+1}) \right|_{\mathcal{C}^k(X)} \\ & \leq \int_{(W \setminus \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0))^q \times (W^c \setminus \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0))} C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p} \max_{1 \leq i \leq q+1} d(x_0, x_i)} \\ & \quad \times e^{-c\sqrt{p}d(x_{q+1}, W)} dv_X(x_1) \dots dv_X(x_{q+1}). \end{aligned} \quad (2.157)$$

Since $\max_{1 \leq i \leq q+1} d(x_0, x_i) \geq \frac{1}{q+1}(d(x_0, x_1) + d(x_0, x_2) + \dots + d(x_0, x_{q+1}))$ and $d(x_{q+1}, W) \geq \eta$ we get

$$\begin{aligned} & \left| (T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x_0, x_0) - \int_{(\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0))^q \times \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)} \Pi_{p,q+2}(x_0, x_1, \dots, x_{q+1}) dv_X(x_1) \dots dv_X(x_{q+1}) \right|_{\mathcal{C}^k(X)} \\ & \leq C_k^{q+2} p^{(q+2)n+k/2} e^{-c\sqrt{p}\eta} \left(\int_{(W \setminus \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0))} e^{-\frac{c\sqrt{p}}{q+1}d(x_0, x_1)} dv_X(x_1) \right)^q \\ & \quad \times \left(\int_{W^c \setminus \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)} e^{-\frac{c\sqrt{p}}{q+1}d(x_0, x_{q+1})} dv_X(x_{q+1}) \right). \end{aligned} \quad (2.158)$$

CHAPTER 2

Applying Lemma 2.22 to the integral terms in the above inequality, we obtain

$$(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x_0, x_0) = \int_{(\mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^+(x_0))^q \times \mathcal{U}_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)} \Pi_{p,q+2}(x_0, x_1, \dots, x_{q+1}) dv_X(x_1) \dots dv_X(x_q) \\ + \mathcal{O}(p^{n+k/2} e^{-c\sqrt{p}\eta}). \quad (2.159)$$

The localized version of the above equation becomes

$$(T_{W,p,x_0}^q - T_{W,p,x_0}^{q+1})(0, 0) = \int_{(U_{\eta,\varepsilon}^+(x_0))^q \times U_{\eta,\varepsilon}^-(x_0)} \Pi_{p,q+2,x_0}(0, (Y_1, x_{m,1}), \dots, (Y_{q+1}, x_{m,q+1})) \\ \times \kappa_{V,x_0}(Y_1, x_{m,1}) \dots \kappa_{V,x_0}(Y_{q+1}, x_{m,q+1}) dv_{TY}(Y_1) \dots dv_{TY}(Y_{q+1}) dx_{m,1} \dots dx_{m,q+1} + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (2.160)$$

where

$$\Pi_{p,q+2,x_0}(0, (Y_1, x_{m,1}), \dots, (Y_{q+1}, x_{m,q+1})) := \\ P_{p,x_0}(0, (Y_1, x_{m,1})) \dots P_{p,x_0}((Y_q, x_{m,q}), (Y_{q+1}, x_{m,q+1})) P_{p,x_0}((Y_{q+1}, x_{m,q+1}), 0). \quad (2.161)$$

By the same procedure as in the proof of Theorem 2.24, we decompose the above integral in the coordinates $Y_{i,H}, z_{m,i}$, use the Taylor expansion of $h_s(Y, x_m)$ and of κ_{V,x_0} , and integrate over $W_{H,i} = p^{1/2}Y_{H,i} \in T_{x_0}H$. We then obtain

$$(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x_0, x_0) = \sum_{k \geq 0} p^{n-k/2} I_{k,q,x_0}(p^{1/2}s) + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (2.162)$$

where there exist $\text{End}(E)_{x_0}$ -valued polynomials a_{k,q,x_0} such that after a change of variable $z_i = p^{1/2}z_{m,i}$ the integral over $z_{m,i}$ writes as

$$I_{k,q,x_0}(p^{1/2}s) = \int_{\substack{\text{Im}(z_1), \dots, \text{Im}(z_q) > -p^{1/2}s \\ \text{Im}(z_{q+1}) < -p^{1/2}s}} a_{k,q,x_0}(z_1, \dots, z_{q+1}) \\ \times \exp\left(-\frac{\pi\alpha_{x_0}}{2} \langle MZ, Z \rangle\right) d\lambda(z_1) \dots d\lambda(z_{q+1}), \quad (2.163)$$

with λ the Lebesgue measure and M such that

$$-\pi\alpha_{x_0}z_1(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \dots - \pi\alpha_{x_0}z_q(\bar{z}_q - \bar{z}_{q+1}) - \pi\alpha_{x_0}|z_{q+1}|^2 = -\frac{\pi\alpha_{x_0}}{2} \langle MZ, Z \rangle, \quad (2.164)$$

so that we have

$$P_{\alpha_{x_0}}(0, z_1) P_{\alpha_{x_0}}(z_1, z_2) \dots P_{\alpha_{x_0}}(z_{q+1}, 0) = \alpha_{x_0}^{q+2} \exp\left(-\frac{\pi\alpha_{x_0}}{2} \langle MZ, Z \rangle\right), \quad (2.165)$$

with $Z = (x_1, y_1, \dots, x_{q+1}, y_{q+1})$, $z_j = x_j + iy_j$. From the first term in the expansion of the Bergman kernel (2.110), in the formula (2.163) notice that we get

$$a_{0,q,x_0}(z_1, \dots, z_{q+1}) = \frac{\det_{\mathbb{C}}(\mathcal{J}_{x_0}|_{HV})}{(2\pi)^{n-1}} \alpha_{x_0}^{q+2}, \quad (2.166)$$

the term $(2\pi)^{-(n-1)} \det_{\mathbb{C}} \mathcal{J}_{x_0}|_{HV}$ is what remains after integration along the variables $Y_{i,H}$ which amounts to composing $q+1$ times the horizontal Bergman kernel $\mathcal{P}_{x_0}^H$ defined in (2.107). The matrix M in (2.163) can be given explicitly as the $2(q+1) \times 2(q+1)$ -matrix defined blockwise by $M_{j,j} = 2\text{Id}_2$, $1 \leq j \leq q+1$ and

$$M_{j,j+1} = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{j+1,j} = (M_{j,j+1})^t, \quad 1 \leq j \leq q, \quad (2.167)$$

and $M_{i,j} = 0$ otherwise. Notice that $\text{Re}(M)$ is positive definite. Let $\mu > 0$ be the smallest eigenvalue of $\text{Re}(M)$. Let d_k be the degree of a_{k,q,x_0} . On the compact tubular neighborhood $\mathcal{U}_\eta$ the coefficients α_{x_0} and the coefficients in front of each monomial of the polynomials a_{k,q,x_0} are bounded and we have an inequality of the form, for $\alpha = \min_{x_0 \in U_\eta} \alpha_{x_0}$,

$$|I_{k,q,x_0}(p^{1/2}s)| \leq \int_{\substack{\text{Im}(z_1), \dots, \text{Im}(z_q) > -p^{1/2}s \\ \text{Im}(z_{q+1}) < -p^{1/2}s}} C_{k,q}(1+|Z|^2)^{d_k/2} \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}\mu|Z|^2\right) d\lambda(z_1) \dots d\lambda(z_{q+1}), \quad (2.168)$$

which implies by integrating over $z_1, \dots, z_q \in \mathbb{C}$,

$$|I_{k,q,x_0}(p^{1/2}s)| \leq \int_{\text{Im}(z_{q+1}) < -p^{1/2}s} C'_{k,q}(1+|z_{q+1}|^2)^{d_k/2} \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}\mu|z_{q+1}|^2\right) d\lambda(z_{q+1}). \quad (2.169)$$

therefore $I_{k,q,x_0}(p^{1/2}s)$ has exponential decay in $p^{d_k/2}s^{d_k} \exp\left(-\frac{\mu\pi\alpha}{2}ps^2\right)$ for $s > 0$. Note that the above inequality only depends on $s > 0$ and not on $x_0 \in V_s$. To handle the case $s < 0$, we instead write

$$|I_{k,q,x_0}(p^{1/2}s)| \leq \int_{\text{Im}(z_1), \dots, \text{Im}(z_q) > -p^{1/2}s} C''_{k,q}(1+|z_1|^2 + \dots + |z_q|^2)^{d_k/2} \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}\mu(|z_1|^2 + \dots + |z_q|^2)\right) d\lambda(z_1) \dots d\lambda(z_q). \quad (2.170)$$

This proves (2.19) for $g(X) = X^q - X^{q+1}$. When g is any polynomial vanishing at 0 and 1, we conclude by decomposing g in the basis $\{X^q - X^{q+1}\}_{q \geq 1}$.

Proof of (2.20). We first state a technical lemma, which we prove later on in Section 2.4.4.

CHAPTER 2

Lemma 2.25. *Let M be the matrix defined (2.167). Set*

$$J_q(s) := \int_{\substack{\operatorname{Im}(z_1), \dots, \operatorname{Im}(z_q) > -s \\ \operatorname{Im}(z_{q+1}) < -s}} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \langle MZ, Z \rangle\right) d\lambda(z_1) \dots d\lambda(z_{q+1}), \quad (2.171)$$

Then we have

$$J_q(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{erfc}^q(y) - \operatorname{erfc}^{q+1}(y) \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y+\sqrt{2\pi}s)^2} dy. \quad (2.172)$$

From (2.166), applying the change of variable $Z' = \sqrt{\alpha_{x_0}}Z$ in (2.163), we get

$$I_{0,q,x_0}(p^{1/2}s) = \frac{\det_{\mathbb{C}}(\mathcal{J}_{x_0}|_{HV})}{(2\pi)^{n-1}} \alpha_{x_0} J_q(s\sqrt{p\alpha_{x_0}}), \quad (2.173)$$

by (2.172), this proves (2.20) for $g(X) = X^q - X^{q+1}$. When g is any polynomial vanishing at 0 and 1, we conclude by decomposing g in the basis $\{X^q - X^{q+1}\}_{q \geq 1}$. This proves (2) of Theorem 2.3 and finishes the proof of the theorem. $\square$

2.4.3 Trace asymptotics for $T_{W,p}$, proofs of Corollary 2.4 and Corollary 2.5. In this paragraph we prove Corollary 2.4, from which we then deduce Corollary 2.5. The proofs also start with the case $g(X) = X^q - X^{q+1}$.

Proof of Corollary 2.4. We integrate (2.162) over $s \in]-\eta/2, \eta/2[$ and obtain

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1}) &= \int_{-\eta/2}^{\eta/2} ds \int_{x_0 \in V_s} \operatorname{Tr}\left((T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1})(x_0, x_0)\right) \kappa(x_0, s) dv_V(x_0) + \mathcal{O}(p^{-\infty}) \\ &= \sum_{k \geq 0} p^{n-k/2} \int_{-\eta/2}^{\eta/2} ds \int_{x_0 \in V_s} \operatorname{Tr}(I_{k,q,x_0}(p^{1/2}s)) \kappa(x_0, s) dv_V(x_0) + \mathcal{O}(p^{-\infty}) \\ &= \sum_{k \geq 0} p^{n-k/2} \int_{-\eta/2}^{\eta/2} J_{k,q,s}(p^{1/2}s) ds + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \end{aligned} \quad (2.174)$$

where κ is such that $dv_X(x_0) = \kappa(x_0, s) dv_V(x_0) ds$ with $\kappa(x_0, 0) = 1$ and to get the form (2.174) we take the trace and write the Taylor expansion of $\kappa(x_0, s)$ as

$$\kappa(x_0, s) = \sum_{k \geq 0} p^{-k/2} c_{k,x_0} (p^{1/2}s)^k + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (2.175)$$

where $c_{0,x_0} = 1$, and then we integrate over $x_0 \in V_s$. By change of variable $s' = p^{1/2}s$, (2.174) becomes

$$\operatorname{Tr}(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1}) = \sum_{k \geq 0} p^{n-k/2-1/2} \int_{-\sqrt{p}\eta/2}^{\sqrt{p}\eta/2} J_{k,q,p^{-1/2}s}(s) ds + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (2.176)$$

Decouple the variables and write the expansion of $J_{k,q,t}(s)$ at $t = 0$ uniformly in s as

$$J_{k,q,t}(s) = \sum_{j \geq 0} f_{k,j,q}(s) t^j, \quad (2.177)$$

where each $f_{k,j}$ has exponential-type decay in s^2 by (2.169) and (2.170). We now get

$$\mathrm{Tr}(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1}) = \sum_{j,k \geq 0} p^{n-(k+j)/2-1/2} \int_{-\sqrt{p}\eta/2}^{\sqrt{p}\eta/2} f_{k,j,q}(s) s^j ds + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (2.178)$$

By the decay property of the functions $f_{k,j,q}$, this gives

$$\mathrm{Tr}(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1}) = \sum_{j,k \geq 0} p^{n-(k+j)/2-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{k,j,q}(s) s^j ds + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (2.179)$$

We therefore obtain the asymptotics of the trace

$$\mathrm{Tr}(T_{W,p}^q - T_{W,p}^{q+1}) = \sum_{k \geq 1} p^{n-k/2} a_{k,q}(W) + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (2.180)$$

Let us now compute the coefficient $a_{1,q}(W)$. The integral we need to compute involves the first coefficients of each expansion (2.174), (2.175), (2.177), therefore we have

$$a_{1,q}(W) = \mathrm{rk}(E) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V I_{0,q,x_0}(s) dv_V(x_0) ds \quad (2.181)$$

By (2.173) we have

$$a_{1,q}(W) = \mathrm{rk}(E) \int_V \frac{\det_{\mathbb{C}}(\mathcal{J}_{x_0}|_{HV})}{(2\pi)^{n-1}} \alpha_{x_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} J_q(s\sqrt{\alpha_{x_0}}) ds \right] dv_V(x_0), \quad (2.182)$$

By Lemma 2.25 we get

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} J_q(s\sqrt{\alpha_{x_0}}) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{erfc}^q(y) - \mathrm{erfc}^{q+1}(y)) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y+\sqrt{2\pi\alpha_{x_0}}s)^2} dy ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_{x_0}}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{erfc}^q(y) - \mathrm{erfc}^{q+1}(y)) dy, \end{aligned} \quad (2.183)$$

to get the last equality we applied Fubini, the change of variable $s' = y + \sqrt{2\pi\alpha_{x_0}}s$, and used the fact that $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s'^2} ds' = \sqrt{\pi}$. Hence (2.182) becomes

$$a_{1,q}(W) = (2\pi)^{-1/2} \mathrm{rk}(E) C(V) C_q, \quad (2.184)$$

CHAPTER 2

with

$$C_q := \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{erfc}^q(y) - \operatorname{erfc}^{q+1}(y)) dy, \quad C(V) := \int_{x_0 \in V} \frac{\det_{\mathbb{C}}(\mathcal{J}_{x_0}|_{HV})}{(2\pi)^{n-1}} \sqrt{\alpha_{x_0}} dv_V(x_0). \quad (2.185)$$

Notice that if we assume $J_0 = J$, we get $C(V) = \operatorname{vol}(V)$. From (2.180), (2.184), (2.185) we obtain for $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ polynomial vanishing at 0 and 1, the asymptotic expansion

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(g(T_{W,p})) &= \sum_{k \geq 1} a_{k,g}(W) p^{n-k/2} + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad \text{with} \quad a_{1,g} = (2\pi)^{-1/2} \operatorname{rk}(E) C(V) I(g), \\ \text{and} \quad I(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\operatorname{erfc}(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.186)$$

In the case where g only vanishes at 0, applying (2.186) to $\tilde{g}(x) := g(x) - g(1)x$ proves Corollary 2.4. $\square$

Proof of Corollary 2.5. To get Corollary 2.5 from Corollary 2.4, it is sufficient to adapt the proof of Charles–Estienne in [18, §6, pp. 546–548]. For (2.26), their proof relies on the fact that the spectrum of $g(T_{W,p})$ is nonnegative and on the Stone–Weierstrass polynomial approximation theorem. To get (2.27), the idea is to approximate the function $\mathbf{1}_{[a,b]}$ from above and below by continuous functions vanishing near 0 and 1. $\square$

2.4.4 Proof of Lemma 2.25. In this paragraph we prove the technical result of Lemma 2.25. Recall that

$$J_q(s) := \int_{\substack{\operatorname{Im}(z_1), \dots, \operatorname{Im}(z_q) > -s \\ \operatorname{Im}(z_{q+1}) < -s}} \exp\left(-\frac{\pi}{2} \langle MZ, Z \rangle\right) d\lambda(z_1) \dots d\lambda(z_{q+1}), \quad (2.187)$$

Let A', B' be the $(q+1) \times (q+1)$ matrices defined by

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.188)$$

Notice A' is the matrix of the discrete Laplace operator. For $X = (x_1, x_2, \dots, x_{q+1})$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{q+1})$, $Z = (x_1, y_1, \dots, x_{q+1}, y_{q+1})$ and since B' is skew-symmetric, we get

$$\langle MZ, Z \rangle = \langle A'X, X \rangle + \langle A'Y, Y \rangle + 2i \langle X, B'Y \rangle. \quad (2.189)$$

Hence the equality

$$\begin{aligned}
 J_q(s) &= \int_{\substack{y_1, \dots, y_q > -s \\ y_{q+1} < -s}} \int_{(x_1, \dots, x_{q+1}) \in \mathbb{R}^{q+1}} \exp \left[-\frac{\pi}{2} (\langle A'X, X \rangle + \langle A'Y, Y \rangle) \right] \\
 &\quad \exp [i\pi \langle X, B'Y \rangle] d\lambda(X) d\lambda(Y), \\
 &= \int_{\substack{y_1, \dots, y_q > -s \\ y_{q+1} < -s}} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \langle A'Y, Y \rangle \right] F(Y) d\lambda(Y),
 \end{aligned} \tag{2.190}$$

and we recognize a Fourier transform

$$\begin{aligned}
 F(Y) &= \int_{(x_1, \dots, x_{q+1}) \in \mathbb{R}^{q+1}} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \langle A'X, X \rangle \right] \exp [i\pi \langle X, B'Y \rangle] d\lambda(X) \\
 &= \mathcal{F} \left(\exp \left[-\pi \left\langle \frac{1}{2} A'X, X \right\rangle \right] \right) \left(-\frac{1}{2} B'Y \right) \\
 &= 2^{(q+1)/2} (\det A')^{-1/2} \mathcal{F} (\exp [-\pi \langle X, X \rangle]) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} (A')^{-1/2} B'Y \right) \\
 &= 2^{(q+1)/2} (\det A')^{-1/2} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \langle (A')^{-1/2} B'Y, (A')^{-1/2} B'Y \rangle \right] \\
 &= 2^{(q+1)/2} (\det A')^{-1/2} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \langle B'^T (A')^{-1} B'Y, Y \rangle \right].
 \end{aligned} \tag{2.191}$$

We now have to compute

$$J_q(s) = 2^{(q+1)/2} (\det A')^{-1/2} \int_{\substack{y_1, \dots, y_q > -s \\ y_{q+1} < -s}} \exp \left[-\frac{\pi}{2} \langle (A' + B'^T (A')^{-1} B')Y, Y \rangle \right] d\lambda(Y). \tag{2.192}$$

Set

$$\begin{aligned}
 E_1 &:= \text{Diag}(q+1, 2q, 3(q-1), \dots, 2q, q+1), \\
 E_2 &:= \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ q & 0 & & & 0 \\ q-1 & 2(q-1) & 0 & & \\ q-2 & 2(q-2) & 3(q-2) & \ddots & \\ \vdots & & & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & q & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.193}$$

Notice $B'^T = -B'$, $\det A' = (q+2)$ and the inverse of A' is given by

$$A'^{-1} = \frac{1}{q+2} (E_1 + E_2 + E_2^T). \tag{2.194}$$

CHAPTER 2

We compute

$$B'E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2q & 0 & & & \\ -(q+1) & 0 & 3(q-1) & 0 & & 0 \\ 0 & -2q & 0 & 4(q-2) & \ddots & \\ & 0 & -3(q-1) & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & q+1 \\ & & & 0 & -2q & 0 \end{pmatrix},$$

$$B'E_2 = \begin{pmatrix} q & 0 & & & & \\ q-1 & 2(q-1) & 0 & & & \\ -2 & 2(q-2) & 3(q-2) & & & 0 \\ -2 & -4 & 3(q-3) & \ddots & & \\ & & -6 & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2(q-1) & 0 \\ & & & & q-1 & q & 0 \\ -2 & -4 & -6 & \cdots & -2(q-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.195)$$

$$B'E_2^T = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2(q-1) & \cdots & -6 & -4 & -2 \\ 0 & q & (q-1) & & & & \\ & 0 & 2(q-1) & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & -6 & & \\ & & & \ddots & 3(q-3) & -4 & -2 \\ & & 0 & & 3(q-2) & 2(q-2) & -2 \\ & & & & 0 & 2(q-1) & q-1 \\ & & & & & 0 & q \end{pmatrix}, \quad (2.196)$$

and we get $(q+2)B'A'^{-1} = D_1 + D_2$, with

$$D_1 = \begin{pmatrix} q & 2q & 0 & & & \\ -2 & q-2 & 2(q-1) & 0 & & 0 \\ 0 & -4 & q-4 & 2(q-2) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & -2(q-1) & -q+2 & 2 \\ & & & 0 & -2q & -q \end{pmatrix}, \quad (2.197)$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(q-1) & \cdots & 6 & 4 & 2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \\ -2 & \ddots & & & 6 & \vdots & \vdots \\ & -4 & & \ddots & & 4 & \\ \vdots & \vdots & -6 & & & \ddots & 2 \\ & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -2 & -4 & -6 & \cdots & -2(q-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.198)$$

We compute

$$D_1 B' = \begin{pmatrix} -2q & q & 2q & 0 & & & & \\ -(q-2) & -2q & q-2 & 2(q-1) & \ddots & & & 0 \\ 4 & -(q-4) & -2q & q-4 & 2(q-2) & & & \\ 0 & 6 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & & & 4 \\ 0 & & & & & & -(q-2) & \\ & & & 0 & 2q & q & -2q & \end{pmatrix},$$

$$D_2 B' = \begin{pmatrix} 0 & -2(q-1) & -2(q-2) & 4 & \cdots & \cdots & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & -2(q-2) & -2(q-3) & 4 & & & \\ 0 & -2 & 0 & -2(q-3) & & \ddots & & \vdots \\ 4 & -2 & -4 & 0 & & \ddots & 4 & \\ & 4 & -4 & -6 & \ddots & & -2 & 4 \\ \vdots & & \ddots & -6 & \ddots & & -2 & 0 \\ & & & 4 & \ddots & -2(q-2) & 0 & 0 \\ 4 & \cdots & \cdots & \cdots & 4 & -2(q-2) & -2(q-1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.199)$$

And we get

$$(q+2)B'A'^{-1}B' = \begin{pmatrix} -2q & -(q-2) & 4 & \cdots & 4 \\ -(q-2) & -2q & -(q-2) & \ddots & \vdots \\ 4 & -(q-2) & \ddots & \ddots & 4 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & -(q-2) \\ 4 & \cdots & 4 & -(q-2) & -2q \end{pmatrix}. \quad (2.200)$$

CHAPTER 2

Therefore we have

$$A' + B'^T A'^{-1} B' = 4 \text{Id} - \frac{4}{q+2} \text{Ones} = 2\Sigma^{-1}, \quad (2.201)$$

with

$$\Sigma := \frac{1}{2}(\text{Id} + \text{Ones}), \quad \text{and} \quad \text{Ones} := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.202)$$

Since $\det A' = (q+2)$, from (2.192) and (2.201) we get

$$\begin{aligned} J_q(s) &= \frac{2^{(q+1)/2}}{\sqrt{q+2}} \int_{\substack{y_1, \dots, y_q > -s \\ y_{q+1} < -s}} \exp\left(-\pi \langle \Sigma^{-1} Y, Y \rangle\right) d\lambda(Y) \\ &= \frac{(1/2\pi)^{(q+1)/2}}{\sqrt{\frac{q+2}{2^{q+1}}}} \int_{\substack{y_1, \dots, y_q > -\sqrt{2\pi}s \\ y_{q+1} < -\sqrt{2\pi}s}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Sigma^{-1} Y, Y \rangle\right) d\lambda(Y). \end{aligned} \quad (2.203)$$

In order to compute J_q , we will now apply the following result of Steck–Owen [44].

Theorem 2.26 ([44, (D)]). *Let $(X_1, \dots, X_n)$ be a multivariate equicorrelated Gaussian with $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ and $\text{Cov}(X_i, X_j) = \rho$ if $i \neq j$. Let us denote by $F_{n,\rho}(s) = \mathbb{P}(X_1 \leq s, \dots, X_n \leq s)$ the distribution function.*

Then if $\rho > -1/(n-1)$ we have

$$F_{n,\rho}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[G\left(\frac{s - \rho^{1/2}y}{(1-\rho)^{1/2}}\right) \right]^n G'(y) dy, \quad (2.204)$$

with $G(x) = \text{erfc}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)$, $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$. The function G is holomorphic and in the case $-\frac{1}{n-1} < \rho < 0$, the expression above still holds when taking $\rho^{1/2} = \sqrt{-1}|\rho|^{1/2}$.

By the expression (2.203) and the symmetries of the Gaussian law, we have

$$J_q(s) = \mathbb{P}\left(X_1 \leq \sqrt{2\pi}s, \dots, X_q \leq \sqrt{2\pi}s\right) - \mathbb{P}\left(X_1 \leq \sqrt{2\pi}s, \dots, X_{q+1} \leq \sqrt{2\pi}s\right), \quad (2.205)$$

where $(X_1, \dots, X_{q+1})$ are equicorrelated centered Gaussians with covariance matrix Σ defined in (2.202), therefore $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ and for $i \neq j$, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 1/2$. Applying the above theorem we obtain

$$J_q(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left[\text{erfc}\left(-\sqrt{2\pi}s + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) \right]^q - \left[\text{erfc}\left(-\sqrt{2\pi}s + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) \right]^{q+1} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy, \quad (2.206)$$

and by change of variable $y' = -\sqrt{2\pi}s + \frac{1}{\sqrt{2}}y$ we get (2.172). This proves Lemma 2.25. $\square$

3 | Fubini–Study forms on punctured Riemann surfaces

This chapter is a joint work with Xiaonan Ma and Lei Wang [2].

3.1 Introduction

In this paper we study the asymptotics of the induced Fubini–Study metrics by Kodaira maps of high tensor powers of a singular Hermitian line bundle over a Riemann surface under the assumption that the curvature has singularities of Poincaré type at a finite set. We show namely that the *quotient* of the induced Fubini–Study metrics by Kodaira maps of high tensor powers of the line bundle and the Poincaré model near the singularity grows polynomially uniformly on a neighborhood of the singularity as the tensor power tends to infinity. In [5, 6], Auvray, Ma and Marinescu obtained a weighted estimate in the C^m -norm near the punctures for the difference of the global Bergman kernel and of the Bergman kernel of the Poincaré model near the singularity, uniformly in the tensor power p of the given line bundle; and an application in arithmetic geometry is the sharp uniform asymptotics of the sup-norm of automorphic (cusp) forms associated with a Fuchsian group of the first kind which was studied by Ullmo, Kramer ... [39, 27, 23]. Moreover, in [7] they also show that the quotient of the global Bergman kernel and the Bergman kernel of the Poincaré model near the singularity tends to one up to $\mathcal{O}(p^{-\infty})$. This paper is an application of the results and the method of [6, 7].

Following [47], an important application of the expansion of the Bergman kernel is the convergence of the induced Fubini–Study forms by Kodaira maps. For more works on Bergman kernels, cf. [17, 20, 35, 48, 22], and we refer the readers to the book [34] for a comprehensive study of Bergman kernels. Donaldson [21] uses the expansion of the Bergman kernel to study the relation between constant scalar curvature Kähler metrics and Chow stability. Coming to our context, an interesting problem is the relation between the existence of special complete/singular metrics and the stability of the pair (X, D) where D is a smooth divisor of a compact Kähler manifold X ; see e.g. the suggestions

CHAPTER 3

of [46, Section 3.1.2] and [30], for the case of “asymptotically hyperbolic Kähler metrics”, which naturally generalize to higher dimensions the complete metrics ω studied here.

We place ourselves in the setting of [6] which we describe now. Let $\bar{\Sigma}$ be a compact Riemann surface and let $D = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \bar{\Sigma}$ be a finite set. We consider the punctured Riemann surface $\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus D$ and a Hermitian form ω_Σ on Σ . Let L be a holomorphic line bundle on $\bar{\Sigma}$, and let h be a singular Hermitian metric on L such that:

- (i) h is smooth over Σ , and for all $j = 1, \dots, N$, there is a trivialization of L in the complex neighborhood $\bar{V}_j$ of a_j in $\bar{\Sigma}$, with associated coordinate z_j such that $|1|_h^2(z_j) = |\log(|z_j|^2)|$;
- (ii) there exists $\varepsilon > 0$ such that the (smooth) curvature R^L of h satisfies $iR^L \geq \varepsilon\omega_\Sigma$ over Σ and moreover, $iR^L = \omega_\Sigma$ on $V_j := \bar{V}_j \setminus \{a_j\}$; in particular, $\omega_\Sigma = \omega_{\mathbb{D}^*}$ in the local coordinate z_j on V_j and (Σ, ω_Σ) is complete.

Here $\omega_{\mathbb{D}^*}$ denotes the Poincaré metric on the punctured unit disc $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, where $\mathbb{D}$ is the unit disc, normalized as follows:

$$\omega_{\mathbb{D}^*} := \frac{idz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \log^2(|z|^2)}. \quad (3.1)$$

For $p \geq 1$, let $h^p := h^{\otimes p}$ be the metric induced by h on $L^p|_\Sigma$, where $L^p := L^{\otimes p}$. We denote by $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ the space of $\mathbf{L}^2$ -holomorphic sections of L^p relative to the metrics h^p and ω_Σ endowed with the obvious inner product. By [34, (6.2.17)], the sections from $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ extend to holomorphic sections of L^p over $\bar{\Sigma}$ which vanish on D . In particular, the dimension d_p of $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ is finite.

We denote by $B_p(\cdot)$ the Bergman kernel function of the orthogonal projection B_p from the space of $\mathbf{L}^2$ -sections of L^p over Σ onto $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$. If $\{S_\ell^p\}_{\ell=1}^{d_p}$ is an orthonormal basis of $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$, then

$$B_p(x) := \sum_{\ell=1}^{d_p} |S_\ell^p(x)|_{h^p}^2. \quad (3.2)$$

Note that these are independent of the choice of basis (see [34, (6.1.10)]). Similarly, let $B_p^{\mathbb{D}^*}(x)$ be the Bergman kernel function of $(\mathbb{D}^*, \omega_{\mathbb{D}^*}, \mathbb{C}, |\log(|z|^2)|^p h_0)$ with h_0 the flat Hermitian metric on the trivial line bundle $\mathbb{C}$.

We fix a point $\mathbf{a} \in D$ and work in coordinates centered at $\mathbf{a}$. Let $\mathbf{e}_L$ be the holomorphic frame of L near $\mathbf{a}$ corresponding to the trivialization in the condition i. By the assumptions i and ii we have the following identification of the geometric data in the coordinate z on the punctured disc $\mathbb{D}_{4r}^*$ of radius $4r$ centered at $\mathbf{a}$, via the trivialization $\mathbf{e}_L$ of L ,

$$(\Sigma, \omega_\Sigma, L, h) \Big|_{\mathbb{D}_{4r}^*} = (\mathbb{D}^*, \omega_{\mathbb{D}^*}, \mathbb{C}, h_{\mathbb{D}^*} = |\log(|z|^2)| \cdot h_0) \Big|_{\mathbb{D}_{4r}^*}, \quad \text{with } 0 < r < (4e)^{-1}. \quad (3.3)$$

In [7], Auvray, Ma and Marinescu proved the following estimates.

Theorem 3.1. [7, Theorems 1.2 and 1.3] *If $(\Sigma, \omega_\Sigma, L, h)$ fulfill conditions i and ii, then for all $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^*$ and $D_1, \dots, D_k \in \left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$, there exists $C > 0$ such that for any $p \in \mathbb{N}^*$ we have*

$$\sup_{z \in V_1 \cup \dots \cup V_N} \left| (D_1 \cdots D_k) \left(\frac{B_p}{B_p^{\mathbb{D}^*}}(z) - 1 \right) \right| \leq Cp^{-\ell}. \quad (3.4)$$

Let us consider the Kodaira map at level $p \geq 2$ induced by $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$, which is a meromorphic map defined by

$$J_{p,(2)} : \Sigma \dashrightarrow \mathbb{P}(H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)^*) \cong \mathbb{CP}^{d_p-1}, \quad x \mapsto \{\sigma \in H_{(2)}^0(\Sigma, L^p) : \sigma(x) = 0\}. \quad (3.5)$$

By [7, p2364], $J_{p,(2)}$ is an embedding for $p \gg 1$.

The $\mathbf{L}^2$ -metric on $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ induces a Fubini–Study form $\omega_{FS,p}$ on the projective space $\mathbb{P}(H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)^*)$. We have by [34, Theorem 5.1.3, (5.1.21)]

$$\frac{1}{p} J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p} = \frac{i}{2\pi} R^L + \frac{i}{2\pi p} \partial \bar{\partial} \log(B_p). \quad (3.6)$$

From (3.4) and (3.6) (cf. [7, Theorem 4.1]), we have, as $p \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{p} J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p} = \frac{1}{2\pi} \omega_\Sigma + \frac{i}{2\pi p} \partial \bar{\partial} \log(B_p^{\mathbb{D}^*}) + \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (3.7)$$

uniformly on $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N$. Note that, by condition ii, we have

$$\omega_{\mathbb{D}^*} = \omega_\Sigma = iR^L = -i\partial \bar{\partial} \log \left| \log(|z|^2) \right| \quad \text{on } V_j. \quad (3.8)$$

The main result of the present paper is the following estimate of the quotient of the induced Fubini–Study forms $\frac{1}{p} J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}$ by Kodaira maps of L^p and the Poincaré form $\omega_{\mathbb{D}^*}(z)$:

Theorem 3.2. *If $(\Sigma, \omega_\Sigma, L, h)$ fulfill conditions i and ii, then*

$$\sup_{z \in V_1 \cup \dots \cup V_N} \left| \frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{p \omega_{\mathbb{D}^*}(z)} \right| = \mathcal{O}(p^3) \quad \text{as } p \rightarrow +\infty. \quad (3.9)$$

Let us mention that the difficulty of the estimate (3.9) consists in the fact that $B_p^{\mathbb{D}^*}(\cdot)$ vanishes at 0. Moreover, by [34, Theorem 6.1.1] and (3.6), for any $K \subset \Sigma$ compact,

$$\frac{1}{p} J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p} - \frac{i}{2\pi} R^L = \mathcal{O}(p^{-1}) \quad \text{on } K. \quad (3.10)$$

CHAPTER 3

We give an important example where Theorem 3.2 applies. Let $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ be a geometrically finite Fuchsian group of the first kind without elliptic elements. Then $\Sigma := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ can be compactified by finitely many points $D = \{a_1, \dots, a_N\}$ into a compact Riemann surface $\bar{\Sigma}$ [6, p956]. Let ω_Σ be the Kähler–Einstein metric on Σ induced by the Poincaré metric $\omega_{\mathbb{H}} = \frac{idz \wedge d\bar{z}}{4|\text{Im}z|^2}$ on the upper-half plane $\mathbb{H}$.

Let $\mathcal{S}_{2p}^\Gamma$ be the space of cusp forms (Spitzenformen) of weight $2p$ of Γ endowed with the Petersson inner product (cf. [6, p995]). We can form the Bergman kernel function of $\mathcal{S}_{2p}^\Gamma$ as in (3.2), denoted by S_p^Γ [6, p995], then

$$S_p^\Gamma(z) = \sum_j |f_j(z)|^2 (2\text{Im}z)^{2p} \quad (3.11)$$

with $\{f_j\}$ any orthonormal basis of $\mathcal{S}_{2p}^\Gamma$. For any $p > 0$ and $z \in \Sigma$, define

$$\omega_\Sigma^{Ber,p} := \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log(S_p^\Gamma(z)). \quad (3.12)$$

As a corollary of Theorem 3.2, we get the following:

Corollary 3.3. *Let $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ be a geometrically finite Fuchsian group of the first kind without elliptic elements and $\Sigma := \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Then*

$$\sup_{z \in \Sigma} \left| \frac{\omega_\Sigma^{Ber,p}(z)}{p \omega_\Sigma(z)} \right| = \mathcal{O}(p^3) \quad \text{as } p \rightarrow +\infty. \quad (3.13)$$

Corollary 3.3 still holds if Γ has elliptic elements. In this case, the quotient $\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ is an orbifold, by the result of Dai–Liu–Ma [20, (5.25)], Ma–Marinescu [34, Section 5.4.3] on the Bergman kernel on orbifolds and the localization of the asymptotics of the Bergman kernel on compact part of Σ , from [6, (1.15), p998], we know near the orbifold points, $\mathcal{O}(p^3)$ in (3.13) can be estimated as $\mathcal{O}(1)$.

In [4, Main Theorem 1], the authors claim a stronger estimate than (3.13) and they prove their estimate by using a computation on classical modular forms, but unfortunately their proof is not complete. As a comparison, the difficulty in proving (3.13) arises from the fact that the Bergman kernel function vanishes on D , but [4, Proposition 2.3] claims that it has a uniform strictly positive lower bound, cf. [6, Corollary 3.6] and the explanation after (3.15).

In [3, Main Theorem 2], the authors claim a high dimension version of (3.13) for ball quotients, but unfortunately their proof is also not complete. The similar incomplete argument occurs in the proof of [3, Proposition 3.6].

3.2 Proof of Theorem 3.2 and Corollary 3.3

In this section, we establish Theorem 3.2 and Corollary 3.3 by using the techniques in [7]. Our starting point is (3.7), and thus we only need to work on the punctured unit disc $\mathbb{D}^*$. The key part in our proof of Theorem 3.2 in Section 3.2.1 is Lemma 3.4 which is established in Section 3.2.2: For the four terms in (3.26) and (3.27a), we get $\mathcal{O}(p^{-\infty})$. The main estimate $\mathcal{O}(p^3)$ is from (3.27b) as $B_p^{\mathbb{D}^*}(z)$ oscillates too violently near $|z| = e^{-p}$ (cf. [6, Section 3.2]). In Section 3.2.3, we explain the proof of Corollary 3.3.

3.2.1 Proof of Theorem 3.2. From [7, (2.6) and (2.7)], we have

$$B_p^{\mathbb{D}^*}(z) = |\log(|z|^2)|^p \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z), \quad \text{for } z \in \mathbb{D}^*, \quad (3.14)$$

where

$$\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} (c_l^{(p)})^2 |z|^{2l}, \quad \text{with } c_l^{(p)} = \left(\frac{l^{p-1}}{2\pi(p-2)!} \right)^{1/2}. \quad (3.15)$$

From (3.14) and (3.15), we know $\lim_{z \rightarrow 0} B_p^{\mathbb{D}^*}(z) = 0$ for any p . Thus, $B_p^{\mathbb{D}^*}$ has no strictly positive lower bound. This is the main difficulty to establish Theorem 1.2.

By [6, Proposition 3.3], for any $m \in \mathbb{N}$, $0 < b < 1$ and $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, there exists $\varepsilon = \varepsilon(b, \gamma) > 0$ such that

$$\left\| B_p^{\mathbb{D}^*}(z) - \frac{p-1}{2\pi} \right\|_{C^m(\{be^{-p^\gamma} \leq |z| < 1\}, \omega_{\mathbb{D}^*})} = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^{1-2\gamma}}) \quad \text{as } p \rightarrow +\infty. \quad (3.16)$$

After reducing to some V_j and identifying the geometric data on $\mathbb{D}_{4r}^*$ and Σ via (3.3), by (3.1) and (3.7), we have

$$\begin{aligned} \frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{p \omega_{\mathbb{D}^*}(z)} - \frac{1}{2\pi} &= \frac{i\partial\bar{\partial} \log(B_p^{\mathbb{D}^*}(z))}{2\pi p \omega_{\mathbb{D}^*}(z)} + \mathcal{O}(p^{-\infty}) \\ &= \frac{1}{2\pi p} |z|^2 \left(\log(|z|^2) \right)^2 \frac{B_p^{\mathbb{D}^*}(z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} B_p^{\mathbb{D}^*}(z) - \frac{\partial}{\partial z} B_p^{\mathbb{D}^*}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}} B_p^{\mathbb{D}^*}(z)}{(B_p^{\mathbb{D}^*}(z))^2} + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

As $|z| \log |z|^2 \frac{\partial}{\partial z}$ is an orthonormal frame of $(T^{(1,0)} \mathbb{D}^*, \omega_{\mathbb{D}^*})$, from (3.16) with $m = 1, 2$, we have

$$\begin{aligned} \sup_{be^{-p^\gamma} \leq |z| < 1} |z|^2 \left(\log(|z|^2) \right)^2 \left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} B_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right| &= \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^{1-2\gamma}}) \quad \text{as } p \rightarrow +\infty. \\ \sup_{be^{-p^\gamma} \leq |z| < 1} |z| \left| \log(|z|^2) \right| \left| \frac{\partial}{\partial z} B_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right| &= \mathcal{O}(e^{-\varepsilon p^{1-2\gamma}}) \quad \text{as } p \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.18)$$

CHAPTER 3

From (3.16) with $m = 0$, (3.17) and (3.18), we get

$$\sup_{be^{-p^\gamma} \leq |z| < 1} \left| \frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{p \omega_{\mathbb{D}^*}(z)} - \frac{1}{2\pi} \right| = \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (3.19)$$

Thus, in order to prove Theorem 3.2 it suffices to show that

$$\sup_{0 < |z| < be^{-p^\gamma}} \left| \frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{p \omega_{\mathbb{D}^*}(z)} \right| = \mathcal{O}(p^3). \quad (3.20)$$

From (3.1), (3.7), (3.8) and (3.14), we get

$$\frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{p \omega_{\mathbb{D}^*}(z)} = |z|^2 (\log |z|^2)^2 \cdot \frac{\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \cdot \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) - \frac{\partial}{\partial z} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)}{2\pi p (\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z))^2} + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (3.21)$$

A key idea of [7] is that we use the precise formula (3.15), and only the lower degree (i.e., $l = \mathcal{O}(p)$) part of (3.15) plays the essential contribution in (3.21). We define δ_p as follows,

$$\delta_p = \left\lfloor \frac{(p-2)}{2|\log r|} \right\rfloor, \quad (3.22)$$

and $\lfloor x \rfloor$ is the integral part of $x \in \mathbb{R}$. Set

$$\begin{aligned} I_{1,p} &:= \sum_{l=1}^{\delta_p} \sum_{m=1}^{\delta_p} l(l-m) (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m}, \\ I_{2,p} &:= \sum_{l=1}^{\delta_p} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} l(l-m) (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m}, \\ I_{3,p} &:= \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\delta_p} l(l-m) (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m}, \\ I_{4,p} &:= \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} l(l-m) (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

From (3.15) and (3.23), we have

$$\begin{aligned} &|z|^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \cdot \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) - \frac{\partial}{\partial z} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right) \\ &= |z|^2 \sum_{l,m=1}^{\infty} l^2 (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m-2} - |z|^2 \sum_{l,m=1}^{\infty} lm (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m-2} \\ &= \sum_{l,m=1}^{\infty} l(l-m) (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} \\ &= I_{1,p} + I_{2,p} + I_{3,p} + I_{4,p}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Thus, by (3.21) and (3.24) we get

$$\frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{p \omega_{\mathbb{D}^*}(z)} = \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p} + I_{2,p} + I_{3,p} + I_{4,p}}{2\pi p \left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} + \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (3.25)$$

We will show the following result.

Lemma 3.4. (1) For $j = 2, 3, 4$, we have

$$\sup_{0 < |z| < be^{-p^\gamma}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{j,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| = \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (3.26)$$

(2) We have

$$\sup_{0 < |z| < 2e^{-p}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| = \mathcal{O}(p^{-\infty}), \quad (3.27a)$$

$$\sup_{e^{-p} < |z| < be^{-p^\gamma}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| = \mathcal{O}(p^4). \quad (3.27b)$$

How to get Theorem 3.2 for Lemma 3.4. Since $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < be^{-p^\gamma}\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2e^{-p}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : e^{-p} < |z| < be^{-p^\gamma}\}$, from (3.27a) and (3.27b), we get

$$\sup_{0 < |z| < be^{-p^\gamma}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| = \mathcal{O}(p^4). \quad (3.28)$$

From (3.25), (3.26) and (3.28), we get (3.20). The proof of Theorem 3.2 is completed.

3.2.2 Proof of Lemma 3.4.. From (3.23), we have

$$|I_{1,p}| \leq \sum_{m=2}^{\delta_p} \left| 1 - m \right| (c_1^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2+2m} + \sum_{l=2}^{\delta_p} \sum_{m=2}^{\delta_p} l \left| l - m \right| (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m}. \quad (3.29)$$

We first estimate the first term on the right hand side of (3.29). By (3.15), we have

$$(c_1^{(p)})^2 |z|^2 < \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z), \quad (3.30)$$

and

$$(c_m^{(p)})^2 = \frac{m^{p-1}}{2\pi(p-2)!} = \left(\frac{m}{m-1} \right)^{p-1} \cdot \frac{(m-1)^{p-1}}{2\pi(p-2)!} = \left(\frac{m}{m-1} \right)^{p-1} (c_{m-1}^{(p)})^2. \quad (3.31)$$

CHAPTER 3

From (3.15) and (3.31), as $\frac{l}{l-1} \leq 2$ for $l \geq 2$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{\delta_p} (c_l^{(p)})^2 |z|^{2(l-1)} &= \sum_{l=2}^{\delta_p} \left(\frac{l}{l-1} \right)^{p-1} (c_{l-1}^{(p)})^2 |z|^{2(l-1)} \\ &\leq 2^{p-1} \sum_{l=2}^{\delta_p} (c_{l-1}^{(p)})^2 |z|^{2(l-1)} \leq 2^{p-1} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z). \end{aligned} \quad (3.32)$$

From (3.22), (3.30) and (3.32), we have

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\delta_p} \left| 1 - m \right| (c_1^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2+2m} &\leq (\delta_p - 1) (c_1^{(p)})^2 |z|^2 \sum_{m=2}^{\delta_p} (c_m^{(p)})^2 |z|^{2(m-1)} \cdot |z|^2 \\ &\leq (\delta_p - 1) 2^{p-1} |z|^2 \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^2 \\ &\leq p 2^{p-1} |z|^2 \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Proof of (3.27a): For $0 < |z| < 2e^{-p}$, we have

$$2^{p-1} |z| < 2^p e^{-p} = \left(\frac{2}{e} \right)^p. \quad (3.34)$$

Thus, by (3.33) and (3.34), for $|z| < 2e^{-p}$, we get

$$\sum_{m=2}^{\delta_p} \left| 1 - m \right| (c_1^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2+2m} \leq p \left(\frac{2}{e} \right)^p |z| \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^2. \quad (3.35)$$

Next we estimate the second term on the right hand side of (3.29):

$$\begin{aligned} &\sum_{l=2}^{\delta_p} \sum_{m=2}^{\delta_p} l \left| l - m \right| (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} \\ &\leq \delta_p \cdot \delta_p \sum_{l=2}^{\delta_p} \sum_{m=2}^{\delta_p} (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} \quad (\text{as } |l - m| < \delta_p) \\ &= \delta_p^2 |z|^4 \sum_{l=2}^{\delta_p} (c_l^{(p)})^2 |z|^{2(l-1)} \cdot \sum_{m=2}^{\delta_p} (c_m^{(p)})^2 |z|^{2(m-1)}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

By (3.22), (3.32), (3.34) and (3.36), for $|z| < 2e^{-p}$, as in (3.35), we get

$$\begin{aligned} \sum_{l=2}^{\delta_p} \sum_{m=2}^{\delta_p} l \left| l - m \right| (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} &\leq \delta_p^2 |z|^4 \cdot 2^{p-1} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \cdot 2^{p-1} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \\ &\leq p^2 \cdot \left(\frac{2}{e} \right)^{2p} |z|^2 \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Combining (3.29), (3.35) and (3.37), we obtain

$$\left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq p \left(\frac{2}{e} \right)^p |z| \left(\log |z|^2 \right)^2 + p^2 \left(\frac{2}{e} \right)^{2p} |z|^2 \left(\log |z|^2 \right)^2. \quad (3.38)$$

Since the functions $f(x) = x(\log x^2)^2$ and $g(x) = x^2(\log x^2)^2$ are bounded on the interval $]0, 2e^{-p}[\subset]0, e^{-2}[$, by (3.38), we get that there exists $C_1 > 0$ such that

$$\sup_{0 < |z| < 2e^{-p}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq C_1 \left[p \left(\frac{2}{e} \right)^p + p^2 \left(\frac{2}{e} \right)^{2p} \right]. \quad (3.39)$$

By (3.39), we get (3.27a).

Proof of (3.27b). From (3.15), (3.22) and (3.23), we have

$$\begin{aligned} |I_{1,p}| &\leq \sum_{l=1}^{\delta_p} \sum_{m=1}^{\delta_p} l |l - m| (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} \\ &\leq \delta_p \cdot \delta_p \sum_{l=1}^{\delta_p} \sum_{m=1}^{\delta_p} (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} \\ &\leq p^2 \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Therefore,

$$\left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq p^2 \left(\log |z|^2 \right)^2. \quad (3.41)$$

For $z \in \{u \in \mathbb{C} : e^{-p} < |u| < be^{-p^\gamma}\}$, we have $e^{-2p} < |z|^2 < 1$. Thus, $-2p < \log |z|^2 < 0$. Therefore, $\left(\log |z|^2 \right)^2 < 4p^2$. Hence, by (3.41), we have

$$\sup_{e^{-p} < |z| < be^{-p^\gamma}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{1,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq p^2 \cdot 4p^2 = 4p^4. \quad (3.42)$$

From (3.42), we get (3.27b).

Proof of Lemma 3.4(1) for $j = 2$. From (3.23), we have

$$\begin{aligned} |I_{2,p}| &\leq \sum_{l=1}^{\delta_p} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} l |l - m| (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} \\ &< \sum_{l=1}^{\delta_p} l (c_l^{(p)})^2 |z|^{2l} \cdot \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m (c_m^{(p)})^2 |z|^{2m}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

CHAPTER 3

as $l|l - m| = l(m - l) < lm$.

From [7, (3.70)], there exists $C > 0$ such that for any $s \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, we have

$$|c_s^{(p)}| \leq Cp^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2r)^s} \frac{1}{(\log |2r|^2)^{p/2}}. \quad (3.44)$$

Next, we need the following

Lemma 3.5. ([7, (3.60)]). *For any $\tau \in \mathbb{N}$ fixed, we have*

$$\frac{1}{|\log(|2r|^2)|^{p/2}} \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{\delta_p - \tau + 1} \leq Cp^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{\alpha' p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^{\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

for all $p \gg 1$ and $|z| \leq c'p^{-A'}$, where c' and A' are constants defined as follows:

$$A' = \frac{1}{2\alpha'}, \quad \alpha' = \frac{1}{4|\log r|} \quad \text{and} \quad c' = re^{1/2\alpha'} |\log(|2r|^2)|^{1/2\alpha'}. \quad (3.46)$$

Proof. For the sake of completeness, we include a proof here. By (3.22), for any $\tau \in \mathbb{N}$ fixed, we obtain

$$\alpha' p \leq \delta_p - \tau \quad \text{for } p \gg 1. \quad (3.47)$$

Thus, by (3.46) and (3.47) for $\tau \in \mathbb{N}$ fixed, we have

$$\left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2(\delta_p - \tau)/p} \frac{1}{|\log(|2r|^2)|} \leq \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2\alpha'} \frac{1}{|\log(|2r|^2)|} \leq 2^{-2\alpha'} \frac{e}{p} \quad (3.48)$$

for $p \gg 1$, $|z| \leq c'p^{-A'}$. Recall that the Stirling formula states

$$\frac{p^p}{p!} = (2\pi p)^{-1/2} e^p (1 + \mathcal{O}(p^{-1})) \quad \text{as } p \rightarrow +\infty. \quad (3.49)$$

By (3.15), (3.48) and (3.49), for any $\tau \in \mathbb{N}$ fixed, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\log(|2r|^2)|^{p/2}} \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{\delta_p - \tau + 1} &= \frac{1}{2r} \left(\left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2(\delta_p - \tau)/p} \frac{1}{|\log(|2r|^2)|} \right)^{p/2} (2\pi(p-2)!)^{1/2} c_1^{(p)} |z| \\ &\leq Cp^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{\alpha' p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

for $p \gg 1$, $|z| \leq c'p^{-A'}$. □

From now on, we assume $|z| \leq c'p^{-A'}$, $p \gg 1$. By (3.15) and (3.22) we get

$$\sum_{l=1}^{\delta_p} l(c_l^{(p)})^2 |z|^{2l} \leq \delta_p \sum_{l=1}^{\delta_p} (c_l^{(p)})^2 |z|^{2l} \leq \delta_p \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \leq p \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z). \quad (3.51)$$

On the other hand, by (3.44), we have

$$\begin{aligned} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m(c_m^{(p)})^2 |z|^{2m} &\leq \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m C p \frac{1}{(2r)^{2m}} \frac{1}{|\log(|2r|^2)|^p} |z|^{2m} \\ &= C p \frac{1}{|\log(|2r|^2)|^p} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2m}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Since for $0 \leq \xi < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{q=N+1}^{\infty} q \xi^{q-1} &= \left(\sum_{q=N+1}^{\infty} \xi^q \right)' = \left(\frac{\xi^{N+1}}{1-\xi} \right)' \\ &= \frac{(N+1)\xi^N - N\xi^{N+1}}{(1-\xi)^2} \leq \frac{(N+1)\xi^N}{(1-\xi)^2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

we have

$$\begin{aligned} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2m} &= \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2(m-1)} \\ &\leq \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (\delta_p + 1) \frac{\left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2\delta_p}}{\left(1 - \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 \right)^2} \\ &\leq \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (\delta_p + 1) \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^2 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2\delta_p}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Therefore, by (3.22), (3.45) for $\tau = 1$, (3.52) and (3.54), we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m(c_m^{(p)})^2 |z|^{2m} &\leq \left(\frac{4}{3} \right)^2 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (\delta_p + 1) \cdot C p \frac{1}{|\log(|2r|^2)|^p} \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2\delta_p} \\ &\leq \left(\frac{4}{3} \right)^2 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (p+1) C' \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z). \end{aligned} \quad (3.55)$$

CHAPTER 3

From (3.43), (3.51) and (3.55), we get

$$\left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{2,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq \left(\log |z|^2 \right)^2 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^2 C' p(p+1) \frac{1}{2^{2\alpha'p}}. \quad (3.56)$$

Since the function $f(x) = x^2(\log x^2)^2$ is bounded on the interval $]0, 1[$, from (3.56), we get

$$\sup_{0 < |z| \leq c'p^{-A'}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{2,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq C'' p^2 \frac{1}{2^{2\alpha'p}}. \quad (3.57)$$

Since $c'p^{-A'} > be^{-p^\gamma}$ for $p \gg 1$, we get (3.26) for $j = 2$ from (3.57).

Proof of Lemma 3.4(1) for $j = 3$. We assume $|z| \leq c'p^{-A'}$, $p \gg 1$ as in Lemma 3.5. From (3.23), we have

$$\begin{aligned} |I_{3,p}| &\leq \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\delta_p} l |l-m| (c_l^{(p)})^2 (c_m^{(p)})^2 |z|^{2l+2m} \\ &\leq \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2 (c_l^{(p)})^2 |z|^{2l} \cdot \sum_{m=1}^{\delta_p} (c_m^{(p)})^2 |z|^{2m}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

as $l|l-m| = l(l-m) < l^2$.

From (3.44), we have

$$\begin{aligned} \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2 (c_l^{(p)})^2 |z|^{2l} &\leq \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2 C p \frac{1}{(2r)^{2l}} \frac{1}{\left| \log(|2r|^2) \right|^p} |z|^{2l} \\ &= C p \frac{1}{\left| \log(|2r|^2) \right|^p} \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2l}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

By a simple computation, we get for $0 \leq \xi < 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{q=N+1}^{\infty} q(q+1)\xi^{q-1} &= \left(\sum_{q=N+1}^{\infty} \xi^{q+1} \right)'' \\ &= \left(\frac{\xi^{N+2}}{1-\xi} \right)'' \\ &= \frac{(N+2)(N+1)\xi^N - 2N(N+2)\xi^{N+1} + N(N+1)\xi^{N+2}}{(1-\xi)^3} \\ &\leq \frac{(N+2)(N+1)\xi^N}{(1-\xi)^3}. \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2l} &\leq \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l(l+1) \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2(l-1)} \\
 &\leq \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (\delta_p+2)(\delta_p+1) \frac{\left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2\delta_p}}{\left(1 - \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 \right)^3} \\
 &\leq \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (\delta_p+2)(\delta_p+1) \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^3 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2\delta_p}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Therefore, by (3.59) and (3.60), we get

$$\sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2 (c_l^{(p)})^2 |z|^{2l} \leq C \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (\delta_p+2)(\delta_p+1) \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdot p \frac{1}{|\log(|2r|^2)|^p} \left(\frac{|z|}{2r} \right)^{2\delta_p}. \tag{3.61}$$

By (3.22), (3.45) for $\tau = 1$ and (3.61), we get

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2 (c_l^{(p)})^2 |z|^{2l} &\leq C \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (\delta_p+2)(\delta_p+1) \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdot C^2 \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \\
 &\leq C' \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 (p+2)(p+1) \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z).
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

From (3.15), (3.58) and (3.62), we get

$$\left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{3,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq \left(\log |z|^2 \right)^2 \left(\frac{|z|}{2r} \right)^2 \left[C'(p+2)(p+1) \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \right]. \tag{3.63}$$

Since the function $f(x) = x^2(\log x^2)^2$ is bounded on the interval $]0, 1[$, from (3.63), we get

$$\sup_{0 < |z| \leq c'p^{-A'}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{3,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq C_2 p^2 \frac{1}{2^{2\alpha'p}}. \tag{3.64}$$

Since $c'p^{-A'} > be^{-p^\gamma}$ for $p \gg 1$, we get (3.26) for $j = 3$ from (3.64).

CHAPTER 3

Proof of Lemma 3.4(1) for $j = 4$. We assume $|z| \leq c'p^{-A'}$, $p \gg 1$ as in Lemma 3.5. By (3.23), we have

$$\begin{aligned} |I_{4,p}| &\leq \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} l|l-m|(c_l^{(p)})^2(c_m^{(p)})^2|z|^{2l+2m} \\ &\leq \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l^2(c_l^{(p)})^2|z|^{2l} \cdot \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} (c_m^{(p)})^2|z|^{2m} + \sum_{l=\delta_p+1}^{\infty} l(c_l^{(p)})^2|z|^{2l} \cdot \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} m(c_m^{(p)})^2|z|^{2m}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

From (3.44), as in (3.55), we get

$$\begin{aligned} \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} (c_m^{(p)})^2|z|^{2m} &\leq \sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} Cp \frac{1}{(2r)^{2m}} \frac{1}{|\log(|2r|^2)|^p} |z|^{2m} \\ &\leq Cp \frac{1}{|\log(|2r|^2)|^p} \cdot \left(\frac{|z|}{2r}\right)^{2\delta_p+2}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

From (3.45) for $\tau = 1$ and (3.66), we get

$$\sum_{m=\delta_p+1}^{\infty} (c_m^{(p)})^2|z|^{2m} \leq 4C \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \left(\frac{|z|}{2r}\right)^2. \quad (3.67)$$

From (3.55), (3.62), (3.65) and (3.67), we get

$$\begin{aligned} |I_{4,p}| &\leq C' \left(\frac{|z|}{2r}\right)^2 (p+2)(p+1) \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \cdot 4C \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \left(\frac{|z|}{2r}\right)^2 \\ &\quad + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^2 C' \left(\frac{|z|}{2r}\right)^2 (p+1) \frac{1}{2^{2\alpha'p}} \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right]^2 \leq C'' p^2 \frac{1}{2^{4\alpha'p}} \left(\frac{|z|}{2r}\right)^4 \beta_p^{\mathbb{D}^*}(z)^2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Thus, by (3.68) we obtain

$$\left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{4,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq C'' p^2 \frac{1}{2^{4\alpha'p}} \left(\frac{|z|}{2r}\right)^4 \left(\log |z|^2 \right)^2. \quad (3.69)$$

Since the function $f(x) = x^4(\log x^2)^2$ is bounded on the interval $]0, 1[$, from (3.69), we get

$$\sup_{0 < |z| \leq c'p^{-A'}} \left| \left(\log |z|^2 \right)^2 \cdot \frac{I_{4,p}}{\left(\beta_p^{\mathbb{D}^*}(z) \right)^2} \right| \leq C''' p^2 \frac{1}{2^{4\alpha'p}}. \quad (3.70)$$

Since $c'p^{-A'} > be^{-p^\gamma}$ for $p \gg 1$, we get (3.26) for $j = 4$ from (3.70). The proof of Lemma 3.4 is completed.

3.2.3 Proof of Corollary 3.3. Let Γ be a geometrically finite Fuchsian group of the first kind, without elliptic elements, then as explained in [6, p956], $\Sigma := \Gamma \backslash \mathbb{H}$ can be compactified by finitely many points $D = \{a_1, \dots, a_N\}$ into a compact Riemann surface $\bar{\Sigma}$ with genus g such that the following equivalent conditions (i)-(iv) are fulfilled:

- (i) $\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus D$ admits a complete Kähler–Einstein metric ω_Σ with $\text{Ric}_{\omega_\Sigma} = -\omega_\Sigma$,
- (ii) $2g - 2 + N > 0$,
- (iii) the universal cover of Σ is the upper-half plane $\mathbb{H}$,
- (iv) $L = K_{\bar{\Sigma}} \otimes \mathcal{O}_{\bar{\Sigma}}(D)$ is ample, where $K_{\bar{\Sigma}} = T^{*(1,0)}\bar{\Sigma}$ is the canonical line bundle on $\bar{\Sigma}$.

From [6, Lemma 6.2], there exists a singular Hermitian metric on L such that (Σ, ω_Σ) and the formal square root of (L, h) satisfy the condition i and ii.

From [6, the proof of Lemma 6.2], ω_Σ is the Kähler–Einstein form of constant negative curvature -4 , induced by the Poincaré form $\omega_{\mathbb{H}} = \frac{idz \wedge d\bar{z}}{4|\text{Im}z|^2}$ on $\mathbb{H}$, and every $a \in D$ has a coordinate neighborhood $(\bar{U}_a, z)$ in $\bar{\Sigma}$ such that in this coordinate ω_Σ is exactly given by $\omega_{\mathbb{D}^*}(z)$ on $U_a = \bar{U}_a \setminus \{a\}$. Moreover, the curvature of the line bundle $(L|_\Sigma, h)$ is given by $-2i\omega_\Sigma$ and thus the curvature of the (formal) square root of (L, h) is $-i\omega_\Sigma$. Therefore, from [6, Corollary 2.4], we get that for any $k, m \in \mathbb{N}$ and any compact set $K \subset \Sigma$,

$$B_p(x) = \frac{1}{\pi}p - \frac{1}{2\pi} + \mathcal{O}(p^{-k}), \quad \text{in } C^m(K) \text{ as } p \rightarrow +\infty. \quad (3.71)$$

Hence, from (3.6), we get

$$\sup_K \left| \frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{2p \omega_\Sigma(z)} - \frac{1}{2\pi} \right| = \mathcal{O}(p^{-\infty}). \quad (3.72)$$

On the coordinate neighborhood U_a of $a \in D$, we have $\omega_\Sigma = \omega_{\mathbb{D}^*}$. Combine Theorem 3.2 and (3.72), we get

$$\sup_\Sigma \left| \frac{J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p}(z)}{p \omega_\Sigma(z)} \right| = \mathcal{O}(p^3). \quad (3.73)$$

As explained in [6, (6.36)], the space $\mathcal{S}_{2p}^\Gamma$ of cusp forms (Spitzenformen) of weight $2p$ of Γ endowed with the Petersson scalar product is isometric with the space of $\mathbf{L}^2$ holomorphic sections of L^p over Σ (cf. (3.2)) with respect to the volume form ω_Σ and the metric h^p on L^p . The Bergman kernel B_p of $H_{(2)}^0(\Sigma, L^p)$ can be identified to the Bergman kernel S_p^Γ of $\mathcal{S}_{2p}^\Gamma$ (cf. [6, (6.37)]). Thus, by (3.6) and (3.12), we get

$$\omega_\Sigma^{Ber,p} = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log(B_p(z)), \quad \frac{1}{p} J_{p,(2)}^* \omega_{FS,p} = \frac{1}{\pi} \omega_\Sigma + \frac{1}{p} \omega_\Sigma^{Ber,p}. \quad (3.74)$$

From (3.73) and (3.74), we get (3.13). The proof of Corollary 3.3 is completed.

CHAPTER 3

Bibliography

- [1] S. T. Ali and M. Engliš, *Quantization methods: a guide for physicists and analysts*, Rev. Math. Phys. **17** (2005), no. 4, 391–490.
- [2] R. Apredoei, X. Ma, and L. Wang, *Fubini-Study forms on punctured Riemann surfaces*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **363** (2025), 603–615.
- [3] A. Aryasomayajula and B. Balasubramanyam, *Estimates of automorphic forms on $SU(n, 1)$* , 2025, arXiv:2406.07639.
- [4] A. Aryasomayajula and A. Mukherjee, *Estimates of Kähler metrics on noncompact finite volume hyperbolic Riemann surfaces, and their symmetric products*, Ann. Global Anal. Geom. **66** (2024), no. 3, Paper No. 11, 16.
- [5] H. Auvray, X. Ma, and G. Marinescu, *Bergman kernels on punctured Riemann surfaces*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **354** (2016), no. 10, 1018–1022.
- [6] ———, *Bergman kernels on punctured Riemann surfaces*, Math. Ann. **379** (2021), no. 3-4, 951–1002.
- [7] ———, *Quotient of Bergman kernels on punctured Riemann surfaces*, Math. Z. **301** (2022), no. 3, 2339–2367.
- [8] T. Barron, X. Ma, G. Marinescu, and M. Pinsonnault, *Semi-classical properties of Berezin-Toeplitz operators with C^k -symbol*, J. Math. Phys. **55** (2014), 042108, 25pp.
- [9] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Corrected reprint of the 1992 original.
- [10] B. Berndtsson, *Bergman kernels related to Hermitian line bundles over compact complex manifolds*, in: Explorations in complex and Riemannian geometry, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, Contemp. Math., vol. 332, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 1–17.
- [11] J.-M. Bismut and G. Lebeau, *Complex immersions and Quillen metrics*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 74, ii+298.
- [12] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier, *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $\mathfrak{gl}(N)$, $N \rightarrow \infty$ limits*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 2, 281–296.

BIBLIOGRAPHY

- [13] T. Bouche, *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), no. 1, 117–130.
- [14] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of Mathematics Studies, vol. 99, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1981.
- [15] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő*, Journées: Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975), Astérisque, vol. 34–35, Soc. Math. France, 1976, pp. 123–164.
- [16] J. Brüning and X. Ma, *An anomaly formula for Ray-Singer metrics on manifolds with boundary*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 767–837.
- [17] D. Catlin, *The Bergman kernel and a theorem of Tian*, in: Analysis and geometry in several complex variables, Katata, 1997, Trends Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999, pp. 1–23.
- [18] L. Charles and B. Estienne, *Entanglement entropy and Berezin-Toeplitz operators*, Comm. Math. Phys. **376** (2020), 521–554.
- [19] L. Charles and L. Polterovich, *Sharp correspondence principle and quantum measurements*, Algebra i Analiz **29** (2017), no. 1, 237–278.
- [20] X. Dai, K. Liu, and X. Ma, *On the asymptotic expansion of Bergman kernel*, J. Differential Geom. **72** (2006), 1–41.
- [21] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings. I*, J. Differential Geom. **59** (2001), no. 3, 479–522.
- [22] S. Finski, *Semiclassical Ohsawa-Takegoshi extension theorem and asymptotics of the orthogonal Bergman kernel*, J. Differential Geom. **128** (2024), 639–721.
- [23] J. S. Friedman, J. Jorgenson, and J. Kramer, *Uniform sup-norm bounds on average for cusp forms of higher weights*, Arbeitstagung Bonn 2013, Progr. Math., vol. 319, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016, pp. 127–154.
- [24] A. V. Gavrilov, *The double exponential mapping and covariant differentiation*, Sibirsk. Mat. Zh. **48** (2007), 68–74.
- [25] V. Guillemin and A. Uribe, *The Laplace operator on the n th tensor power of a line bundle: eigenvalues which are uniformly bounded in n* , Asymptotic Anal. **1** (1988), 105–113.
- [26] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. III*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2007, Pseudo-differential operators, Reprint of the 1994 edition.

- [27] J. Jorgenson and J. Kramer, *Bounding the sup-norm of automorphic forms*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 6, 1267–1277.
- [28] Y.A. Kordyukov, X. Ma, and G. Marinescu, *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds of bounded geometry*, Comm. Partial Differential Equations **44** (2019), 1037–1071.
- [29] B. Kostant, *Quantization and unitary representations. I. Prequantization*, Lecture Notes in Math., vol. 170, pp. 87–208, Springer, Berlin-New York, 1970.
- [30] J. Li and X. Wang, *Hilbert-Mumford criterion for nodal curves*, Compos. Math. **151** (2015), no. 11, 2076–2130.
- [31] N. Lindholm, *Sampling in weighted L^p spaces of entire functions in $\mathbb{C}^n$ and estimates of the Bergman kernel*, J. Funct. Anal. **182** (2001), 390–426.
- [32] W. Lu, X. Ma, and G. Marinescu, *Donaldson’s Q -operators for symplectic manifolds*, Sci. China Math. **60** (2017), 1047–1056.
- [33] X. Ma and G. Marinescu, *The Spin^c Dirac operator on high tensor powers of a line bundle*, Math. Z. **240** (2002), 651–664.
- [34] ———, *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, Progress in Mathematics, vol. 254, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, xiv+422pp.
- [35] ———, *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds*, Adv. Math. **217** (2008), 1756–1815.
- [36] ———, *Toeplitz operators on symplectic manifolds*, J. Geom. Anal. **18** (2008), 565–611.
- [37] ———, *Berezin-Toeplitz quantization and its kernel expansion*, Geometry and quantization, Trav. Math., vol. 19, Univ. Luxemb., Luxembourg, 2011, pp. 125–166.
- [38] ———, *Exponential estimate for the asymptotics of Bergman kernels*, Math. Ann. **362** (2015), 1327–1347.
- [39] P. Michel and E. Ullmo, *Points de petite hauteur sur les courbes modulaires $X_0(N)$* , Invent. Math. **131** (1998), no. 3, 645–674.
- [40] L. Polterovich, *Inferring topology of quantum phase space*, J. Appl. Comput. Topol. **2** (2018), 61–82, With an appendix by Laurent Charles.
- [41] H. E. Salzer, *Formulas for calculating the error function of a complex variable*, Math. Tables Aids Comput. **5** (1951), 67–70.
- [42] M. Schlichenmaier, *Deformation quantization for almost-Kähler manifolds*, J. Non-linear Math. Phys. **11** (2004), 49–54.
- [43] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Maîtrises de mathématiques, Dunod, Paris, 1970, xxxii+414 pp.

BIBLIOGRAPHY

- [44] G. P. Steck and D. B. Owen, *A note on the equicorrelated multivariate normal distribution*, Biometrika **49** (1962), 269–271.
- [45] G. Székelyhidi, *An introduction to extremal Kähler metrics*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 152, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
- [46] G. Székelyhidi, *Extremal metrics and K-stability (PhD thesis)*, 2006, arXiv:math/0611002.
- [47] G. Tian, *On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geom. **32** (1990), 99–130.
- [48] S. Zelditch, *Szegő kernels and a theorem of Tian*, Internat. Math. Res. Notices (1998), 317–331.
- [49] S. Zelditch and P. Zhou, *Central limit theorem for spectral partial Bergman kernels*, Geom. Topol. **23** (2019), no. 4, 1961–2004.